Линейная алгебра и аналитическая геометрия
Лекция 1
Тема:Линейное пространство

Литература:

1. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах. – СПб: Издательство «Лань», 2008, 256с.
2. Кремер Н.Ш. и др. Высшая математика для экономистов: Практикум.– М.: Юнити-Дана, 2007, 479с.
3. Ефимов А.В., Поспелов А.С. и др. Сборник задач по математике. Ч. 1. – М.: Физматлит, 2001.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1 – М.: Оникс, 2006.

Введение

Матрицы и определители

Матрицы. Основные понятия и определения

Матрицей называется прямоугольная таблица, заполненная некоторыми математическими объектами. По большей части мы будем рассматривать матрицы с элементами из некоторого поля, хотя многие предложения сохраняют силу, если в качестве элементов матриц рассматривать элементы ассоциативного (не обязательно коммутативного) кольца.

Чаще всего элементы матрицы обозначаются прописной буквой с двумя индексами, указывающими «адрес» элемента – первый индекс дает номер строки, второй – номер столбца, а сама матрица обозначается заглавными буквами латинского алфавита $A, B, C, \ldots, X, Y, \ldots$. Размеры матрицы – количество ее строк и столбцов. Таким образом, матрица, содержащая m строк и n столбцов записывается в форме

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix},$$

или короче: $A = \|a_{ij}\|_{mn}$, если же интересует только размерность матрицы, то возможна еще более короткая запись $A(m \times n)$.

Матрица, в которой число строк совпадает с числом столбцов, называется ***квадратной***; если число строк не совпадает с числом столбцов – ***прямоугольной***. Прямоугольная матрица размера $(m \times 1)$ - ***одностолбцовая*** или просто столбец, а размера $(1 \times m)$ - ***однострочная*** или просто строка.

Квадратная матрица имеет две диагонали. Диагональ, идущая от левого верхнего к правому нижнему углу матрицы – ***главная***, вторая диагональ – ***второстепенная*** (или ***побочная***). Если же все элементы квадратной матрицы, расположенные выше (или наоборот ниже) диагонали, равны нулю, матрица называется ***треугольной***.

Например, матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 6 & 7 & -5 \end{pmatrix}$ - квадратная третьего порядка; элементы 1, 2 и (– 5) составляют ее главную диагональ, а 6, 2, 4 – побочную.

Матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ - треугольные.

Матрицы, составленные из чисел, естественно возникают при рассмотрении систем линейных уравнений

Важную роль играют так называемые *диагональные* матрицы. Под этим названием подразумеваются квадратные матрицы, имеющие все элементы равными нулю, кроме элементов главной диагонали.

Диагональная матрица D с диагональными элементами $d_1, d_2, ..., d_n$ обозначается $diag(d_1, d_2, ..., d_n)$, в частности $d(1, 1, ..., 1)$ - единичная матрица. Т.е *единичной* называется матрица, главная диагональ которой занята единицами, а остальные элементы равны нулю, например

$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - единичная матрица второго порядка.

Линейные операции над матрицами

Умножение матрицы на число

Чтобы *умножить число* α *на матрицу* A или матрицу A на число α, нужно умножить на α все элементы матрицы A.

Например,

$$\alpha\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \alpha = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} \end{pmatrix}.$$

Для каждой матрицы A над K и каждых $\alpha, \beta \in K$ имеют место соотношения:

1. $1 \cdot A = A \cdot 1 = A$.
2. $0 \cdot A = A \cdot 0 = O$, $\alpha \cdot O = O \cdot \alpha = O$ (0 – нулевой элемент, O – нуль-матрица).
3. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$; $(A\alpha)\beta = A(\alpha\beta)$.

Сумма матриц

Суммой двух матриц A и B одинаковой размерности, называется матрица, имеющая ту же размерность; элементы полученной матрицы равны суммам соответствующих элементов слагаемых матриц.

Например,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из этого определения непосредственно вытекают соотношения:

4. $A + (B + C) = (A + B) + C$.
5. $A + B = B + A$.
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$; $A(\alpha + \beta) = A\alpha + A\beta$.
7. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$; $(A + B)\alpha = A\alpha + B\alpha$.
8. $A + O = O + A = A$.

Вводя обозначение $(-1)A = -A$, будем иметь

$A + (-A) = O$, $(-\alpha)A = -\alpha A$, $-(A + B) = -A - B$, $-(-A) = A$.

Для краткости вместо $A + (-B)$ обыкновенно пишут $A - B$ и называют *разностью* матриц A и B.

Умножение матриц

Введем теперь действие *умножения матрицы на матрицу*. Предварительно рассмотрим частный случай:

Произведением строки А на столбец В одной и той же длины,

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n),\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

называется число $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$.

Для прямоугольных матриц A и B произведение определено в случае, если длины строк первого сомножителя A равны длинам столбцов второго сомножителя B, т.е. если число столбцов A равно числу строк B. Именно, произведение AB матриц A и B составляется из произведений строк A на столбцы B, при их естественном расположении в матрице. Точнее: ***произведением*** AB матрицы A на матрицу B, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix},$$

называется матрица C, *элемент* c_{ij}, i*-ой строки и* j*-го столбец столбца, которой равен произведению* i*-ой строки* A *на* j*-й столбец* B *(т.е. равен сумме произведений элементов* i*-ой строки матрицы* A *на элементы* j*-го столбца матрицы* B*).* То есть

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ik} b_{kj} = \sum_{\alpha=1}^{k} a_{i\alpha} b_{\alpha j}.$$

Повторимся, <u>произведение матриц определено при условии, если количество столбцов первой матрицы совпадает с количеством строк второй матрицы</u>. В результате же произведения получится матрица, число строк которой

будет таким же как у первой из перемножаемых матриц, а число столбцов – как у второй, т.е. $A_{(m\times p)} \cdot B_{(p\times k)} = C_{(m\times k)}$.

Основные свойства умножения матриц

Рассмотрим теперь основные свойства умножения матриц.

1. $\alpha(AB) = (\alpha A)B$; $A(\alpha B) = (A\alpha)B$; $(AB)\alpha = A(B\alpha)$.

Пусть $A = \|a_{ij}\|_{mn}$, $B = \|b_{jk}\|_{np}$. Пользуясь правилом умножения матриц, мы получим для элемента, находящегося в i-ой строке и k-ом столбце матрицы $\alpha(AB)$ ($i = 1, \dots, m$; $k = 1, \dots, p$) следующее выражение:

$\alpha(a_{i1} b_{1k} + \dots + a_{in} b_{nk})$.

Аналогично, для элемента, находящегося в той же i-ой строке и k-ом столбце матрицы $(\alpha A)B$, получим выражение:

$(\alpha a_{i1}) b_{1k} + \dots + (\alpha a_{in}) b_{nk}$.

Так как оба выражения равны, то первое из равенств **1** доказано.

Таким же способом доказываются и остальные два равенства из **1**, а также свойства:

2. $(A + B)C = AC + BC$.

3. $C(A + B) = CA + CB$.

Из свойств **2**, **3** непосредственно вытекает общее правило: *чтобы умножить сумму матриц на сумму матриц, нужно каждую матрицу первой суммы умножить на каждую матрицу второй и полученные произведения сложить.*

Мы видели, что закон коммутативности для произведения матриц не выполняется: AB может отличаться от BA. Однако второй арифметический закон – ассоциативность умножения – для матричного умножения выполняется.

4. $A(BC) = (AB)C$.

1) $(1\ \ 2)\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1\cdot 3 + 2\cdot 4 = 11.$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 5 & 1\cdot 2 + 2\cdot 3 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 5 & 3\cdot 2 + 4\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 23 & 18 \end{pmatrix}.$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 & 1\cdot 2 + 2\cdot 4 \\ 5\cdot 1 + 3\cdot 3 & 5\cdot 2 + 3\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 14 & 22 \end{pmatrix}.$

Транспонирование матриц

Замена строк матрицы на ее столбцы, а столбцов – на строки называется *транспонированием* матрицы. Так, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

то транспонированная с ней матрица имеет вид

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ясно, что дважды транспонировать - значит вернуться к исходной матрице: $(A^T)^T = A$. Ясно также, что $(A+B)^T = A^T + B^T$ и $(cA)^T = cA^T$.

Несколько сложнее дело обстоит с транспонированием произведения.

Матрица, транспонированная с произведением двух матриц, р произведению транспонированных с ними матриц, взятых в обратном поряд

В буквенной записи:

$(AB)^T = B^T A^T$.

Симметрическая матрица, кососимметрическая матрица

Если A - произвольная квадратная матрица и

$A^T = A$,

то A является *симметрической*; если же

$A^T = -A$,

то – *кососимметрической*.

Из правила транспонирования произведения непосредственно вытекает, что *произведение симметрических матриц есть матрица симметрическая*, а *произведение кососимметрических – матрица кососимметрическая*.

Обратная матрица

Квадратная матрица A над кольцом K называется ***обратимой*** (над K), если существует квадратная матрица X над K, удовлетворяющая соотношениям

$AX = XA = E$.

Каждая матрица X, удовлетворяющая условиям , называется матрицей, ***обратной*** к A, или ***обращением*** матрицы A.

У каждой обратимой матрицы A существует лишь одно обращение.

Ортогональная матрица

Квадратная матрица A называется ***ортогональной***, если

$AA^T = A^T A = E$,

т.е. A - ортогональна, если ее транспонированная матрица является обратной исходной. Отсюда, в частности, следует, что *каждая ортогональная матрица обратима*.

Так как $(A^T)^T = A$, то вытекает, что *обращение ортогональной матрицы есть ортогональная матрица*.

Эрмитова матрица. Унитарная матрица

Матрицы A и $\overline{A^T}$ называются ***эрмитово-сопряженными***. Если $A = \overline{A^T}$, то A называют ***эрмитовой*** или ***эрмитово-симметрической***.

Матрица A, удовлетворяющая соотношению

$\overline{A^T} A = A\overline{A^T} = E$,

называется ***унитарной***.

Таким же способом, как и для ортогональных матриц, доказывается, что *матрица, обратная к унитарной матрице, является унитарной* и что *произведение унитарных матриц является снова унитарной матрицей*.

В заключении перечислим основные свойства операций над матрицами (включая транспонирование матрицы, сложение, умножение на число, перемножение матриц)

1. $(A+B)+C=A+(B+C)$.
2. $A+B=B+A$.
3. Существует 0: $A+0=0+A=A$.
4. Для A существует $-A$: $A+(-A)=0$.
5. $(c_1+c_2)A=c_1A+c_2A$.
6. $c(A_1+A_2)=cA_1+cA_2$.
7. $c_1(c_2A)=(c_1c_2)A$.
8. $1\cdot A=A$.
9. $(AB)C=A(BC)$.
10. $A(B_1+B_2)=AB_1+AB_2$.
11. $(A_1+A_2)B=A_1B+A_2B$.
12. $(cA)B=A(cB)$.
13. $EA=AE=A$.
14. $(A^T)^T=A$.
15. $(A+B)^T=A^T+B^T$.
16. $(cA)^T=cA^T$.
17. $(AB)^T=B^TA^T$.

Ранг матрицы

Пусть дана прямоугольная матрица размеров $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Рангом матрицы называется наибольший из порядков ее миноров, отличных от нуля.

Если все миноры матрицы равны нулю, то ранг матрицы считается равным нулю.

Ранг матрицы будем обозначать r (или $rangA$).

Непосредственно из определения ранга следует:

1. Для матрицы размеров $m \times n$

$0 \le r \le \min(m, n)$,

где $\min(m, n)$ - меньшее из чисел m и n.

2. $r = 0$ тогда и только тогда, когда все элементы матрицы равны нулю.
3. Для квадратной матрицы n-го порядка $r = n$ тогда и только тогда, когда матрица невырожденная.

Как найти ранг матрицы с помощью метода Гаусса?

1) с помощью элементарных преобразований приводим матрицу к ступенчатому виду;

2) ранг матрицы равен количеству строк.

Совершенно понятно, что **использование метода Гаусса не меняет ранга матрицы**, и суть здесь предельно проста: согласно алгоритму, в ходе элементарных преобразований выявляются и удаляются все лишние пропорциональные (линейно зависимые) строки, в результате чего остаётся– максимальное количество линейно независимых строк.

Преобразуем старую знакомую матрицу с координатами трёх коллинеарных векторов:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на –2. К третьей строке прибавили первую строку.

(2) Нулевые строки удаляем.

Таким образом, осталась одна строка, следовательно, $\text{Ранг} = 1$. Что и говорить, это гораздо быстрее, чем рассчитать девять нулевых миноров 2-го порядка и только потом сделать вывод.

:

Пример

Найти ранг матрицы с помощью элементарных преобразований

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 & 8 \\ 7 & 1 & -2 & -1 & 12 \\ 11 & 1 & -3 & 0 & 16 \\ 2 & 2 & -1 & -5 & 12 \end{pmatrix}$$

Решение: дана матрица «четыре на пять», значит, её ранг заведомо не больше, чем 4.
В первом столбце, отсутствует 1 или –1, следовательно, необходимы дополнительные действия, направленные на получение хотя бы одной единицы. За всё время существования сайта мне неоднократно задавали вопрос: «Можно ли в ходе элементарных преобразований переставлять столбцы?». Вот здесь – переставили первый-второй столбец, и всё отлично! В большинстве задач, где используется **метод Гаусса**, столбцы действительно переставлять можно. НО НЕ НУЖНО.
Второй момент касается чисел. В ходе решения полезно руководствоваться следующим эмпирическим правилом: **элементарные преобразования по возможности должны уменьшать числа матрицы**. Ведь с единицей-двойкой-тройкой работать значительно легче, чем, например, с 23, 45 и 97. И первое действие направлено не только на получение единицы в первом столбце, но и на ликвидацию чисел 7 и 11.
Сначала полное решение, потом комментарии:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 & 8 \\ 7 & 1 & -2 & -1 & 12 \\ 11 & 1 & -3 & 0 & 16 \\ 2 & 2 & -1 & -5 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 & 8 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 0 & 6 & -8 \\ -1 & 1 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -1 & -2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & -11 & 20 \end{pmatrix}$$

(1) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на –2. К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на –3. И до кучи: к 4-й строке прибавили 1-ю строку, умноженную на –1.
(2) Последние три строки пропорциональны. Удалили 3-ю и 4-ю строки, вторую строку переместили на первое место.
(3) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на –3.
В приведённой к ступенчатому виду матрице две строки.
Ответ: $\text{Ранг} = 2$

МИРЭА
Российский технологический университет

Как исследовать систему линейных уравнений на совместность?

Нередко помимо решения **системы линейных уравнений** по условию предварительно требуется исследовать её на совместность, то есть доказать, что какое-либо решение вообще существует. Ключевую роль в такой проверке играет

теорема Кронекера-Капелли.

Если ранг **матрицы системы** равен рангу **расширенной матрицы системы**, то система совместна, причём, если данное число совпадает с количеством неизвестных, то решение единственно.

Таким образом, для исследования системы на совместность нужно проверить равенство $\text{Ранг}\,(A) = \text{Ранг}\,(A|b)$, где A – *матрица системы* (вспоминаем терминологию из урока **Метод Гаусса**), а $(A|b)$ – *расширенная матрица системы* (т.е. матрица с коэффициентами при переменных + столбец свободных членов).

Примеры для самостоятельного решения

Пример

Исследовать систему на совместность и найти её решение, если система совместна

а) $\begin{cases} 3x+2y-5z=-1 \\ 2x-y+3z=13 \\ x+2y-z=9 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1-3x_2+2x_3-x_4=8 \\ 3x_1-2x_2+x_3-3x_4=7 \\ 5x_1-3x_2+x_3-8x_4=1 \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=1 \\ 8x_1+12x_2-9x_3+8x_4=3 \\ 4x_1+6x_2+3x_3-2x_4=3 \\ 2x_1+3x_2+9x_3-7x_4=3 \end{cases}$

Исследовать систему на совместность и найти её решение, если система совместна

а) $\begin{cases} 3x+2y-5z=-1 \\ 2x-y+3z=13 \\ x+2y-z=9 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1-3x_2+2x_3-x_4=8 \\ 3x_1-2x_2+x_3-3x_4=7 \\ 5x_1-3x_2+x_3-8x_4=1 \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=1 \\ 8x_1+12x_2-9x_3+8x_4=3 \\ 4x_1+6x_2+3x_3-2x_4=3 \\ 2x_1+3x_2+9x_3-7x_4=3 \end{cases}$

Решение: тем не менее, обратим внимание на строгую верхнюю строчку – по условию,
в первую очередь, требуется проверить систему на совместность. Как начать решение?
В любом случае записываем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приводим её к ступенчатому виду:
а) Пример №1 статьи.:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \ldots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) = (A|b)$$

Элементарные преобразования не меняют ранга матриц, поэтому в результате выполненных действий получены эквивалентные исходным

матрица системы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и расширенная матрица системы $(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$.

Максимальный порядок ненулевого минора *матрицы системы* равен трём. Здесь таковой минор в единственном экземпляре и совпадает он, понятно, с определителем самой матрицы:

$$M_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot1\cdot1=1\neq0$$

Следовательно, $\text{Ранг}\,(A)=3$.

Максимальный порядок ненулевого минора *расширенной матрицы системы* также равен трём:

$$M_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=1\cdot1\cdot4=4\neq0$$

(взяты первые два столбца + столбец свободных членов).

Таким образом, $\text{Ранг}\,(A|b)=3$.

Вывод: $\text{Ранг}\,(A)=\text{Ранг}\,(A|b)=3$, значит, по теореме Кронекера-Капелли система совместна; и поскольку количество переменных (x, y, z – 3 шт.) совпадает с рангом, то система имеет единственное решение.

б)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 2 & -1 & 8 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 5 & -3 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right) \to \ldots \to \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 9 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) = (A|b)$$

В результате элементарных преобразований получена эквивалентная матрица системы $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и расширенная матрица системы $(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 9 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$.

Максимальный порядок ненулевого минора *матрицы системы* равен двум, например:

$M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) = 1 \neq 0$, поэтому $\text{Ранг}\,(A) = 2$

Заметьте, что здесь есть возможность выбрать и другой минор 2-го порядка, но проще всего в качестве примера взять *ступенчатый определитель*.

Максимальный порядок ненулевого минора *расширенной матрицы системы* равен трём, например:

$M_3 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 14 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) \cdot 2 = 2 \neq 0$ *(первые два столбца + столбец свободных членов).*

Таким образом, $\text{Ранг}\,(A|b) = 3$.

Вывод: $\text{Ранг}\,(A) \neq \text{Ранг}\,(A|b)$, значит, по теореме Кронекера-Капелли система несовместна.

в) Пример №3 той же статьи:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 8 & 12 & -9 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 9 & -7 & 3 \end{array}\right) \to \ldots \to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 \end{array}\right) = (A|b)$$

В результате элементарных преобразований получена эквивалентная матрица системы A и расширенная матрица системы $(A|b)$.

Максимальный порядок ненулевого минора *матрицы системы* равен двум, например:

$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 = 10 \neq 0$, следовательно, $\text{Ранг}\,(A) = 2$.

Максимальный порядок ненулевого минора *расширенной матрицы системы* также равен двум, например:

$M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 = 3 \neq 0$, поэтому $\text{Ранг}\,(A|b) = 2$

Второй абзац можно полностью заменить хитрой лаконичной фразой: «по этой же причине $\text{Ранг}\,(A|b) = 2$».

Вывод: $\text{Ранг}\,(A) = \text{Ранг}\,(A|b) = 2$, значит, по теореме Кронекера-Капелли система совместна. Поскольку ранг меньше количества переменных (x_1, x_2, x_3, x_4 – 4 шт.), то система имеет бесконечно много решений.

Для этих систем применяют наиболее универсальный из всех способов решения – **метод Гаусса**. На самом деле, к ответу приведет и «школьный» способ, но в высшей математике принято использовать гауссовский метод последовательного исключения неизвестных.

Пример

Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 1 \end{cases}$$

Что сразу бросается в глаза в этой системе? Количество уравнений – меньше, чем количество переменных. **Если количество уравнений меньше, чем количество переменных**, то сразу можно сказать, что система либо несовместна, либо имеет бесконечно много решений. И это осталось только выяснить.

Начало решения совершенно обычное – запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 2 & -1 & 8 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 5 & -3 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 7 & 7 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 5 & -3 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & -2 & 4 & 18 & 28 \\ 0 & -3 & 6 & 27 & 36 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 9 & 14 \\ 0 & 1 & -2 & -9 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 9 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

(1) На левой верхней ступеньке нам нужно получить +1 или –1. Таких чисел в первом столбце нет, поэтому перестановка строк ничего не даст. Единицу придется организовать самостоятельно, и сделать это можно несколькими способами. К первой строке прибавляем третью строку, умноженную на –1.

(2) Теперь получаем два нуля в первом столбце. Ко второй строке прибавляем первую строку, умноженную на 3. К третьей строке прибавляем первую строку, умноженную на 5.

(3) После выполненного преобразования всегда целесообразно посмотреть, а нельзя ли упростить полученные строки? Можно. Вторую строку делим на 2, заодно получая нужную –1 на второй ступеньке. Третью строку делим на –3.

(4) К третьей строке прибавляем вторую строку.

система несовместна (не имеет решений).

Пример

Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=1 \\ 8x_1+12x_2-9x_3+8x_4=3 \\ 4x_1+6x_2+3x_3-2x_4=3 \\ 2x_1+3x_2+9x_3-7x_4=3 \end{cases}$$

Тут 4 уравнений и 4 неизвестных, таким образом, система может иметь либо единственное решение, либо не иметь решений, либо иметь бесконечно много решений. Как бы там ни было, но метод Гаусса в любом случае приведет нас к ответу. В этом его и универсальность.
Начало опять стандартное. Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 8 & 12 & -9 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 9 & -7 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -8 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

(1) Обратите внимание, что все числа в первом столбце делятся на 2, поэтому на левой верхней ступеньке нас устраивает и двойка. Ко второй строке прибавляем первую строку, умноженную на –4. К третьей строке прибавляем первую строку, умноженную на –2. К четвертой строке прибавляем первую строку, умноженную на –1.
(2) Последние три строки пропорциональны, две из них можно удалить.
В результате элементарных преобразований расширенная матрица системы приведена к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

Перепишем соответствующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=1 \\ 5x_3-4x_4=1 \end{cases}$$

«Обычным» единственным решением системы здесь и не пахнет. Нехорошей строки $(0 \ldots 0|\lambda)$ тоже нет. Значит, это третий оставшийся случай – система имеет бесконечно много решений.
Бесконечное множество решений системы коротко записывают в виде так называемого <u>общего решения системы</u>.

Общее решение системы найдем с помощью обратного хода метода Гаусса.
Сначала нужно определить, какие переменные у нас являются *базисными*, а какие переменные *свободными*.
Базисные переменные всегда «сидят» строго на ступеньках матрицы.

В данном примере базисными переменными являются x_1 и x_3

Свободные переменные – это все **оставшиеся** переменные, которым не досталось ступеньки. В нашем случае их две: x_2, x_4 – свободные переменные.
Теперь нужно **все** *базисные переменные* выразить **только через** *свободные переменные*.
Обратный ход алгоритма Гаусса традиционно работает снизу вверх.

Из второго уравнения системы выражаем базисную переменную x_3:

$$5x_3 - 4x_4 = 1 \Rightarrow 5x_3 = 4x_4 + 1 \Rightarrow x_3 = \frac{4}{5}x_4 + \frac{1}{5}$$

Теперь смотрим на первое уравнение: $2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1$. Сначала в него подставляем найденное выражение $x_3 = \frac{4}{5}x_4 + \frac{1}{5}$:

$$2x_1 + 3x_2 - \left(\frac{4}{5}x_4 + \frac{1}{5}\right) + x_4 = 1$$

Осталось выразить базисную переменную x_1 через свободные переменные x_2, x_4:

$$2x_1 + 3x_2 - \frac{4}{5}x_4 - \frac{1}{5} + x_4 = 1$$

$$2x_1 = 1 - 3x_2 + \frac{4}{5}x_4 + \frac{1}{5} - x_4$$

$$2x_1 = -3x_2 - \frac{1}{5}x_4 + \frac{6}{5}$$

$$x_1 = -\frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{10}x_4 + \frac{3}{5}$$

В итоге получилось то, что нужно – **все** базисные переменные (x_1 и x_3) выражены **только через** свободные переменные x_2, x_4:

$$x_1 = -\frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{10}x_4 + \frac{3}{5}$$

$$x_3 = \frac{4}{5}x_4 + \frac{1}{5}$$

Собственно, общее решение готово:

$$\left(-\frac{3}{2}x_2-\frac{1}{10}x_4+\frac{3}{5};\ x_2;\ \frac{4}{5}x_4+\frac{1}{5};\ x_4\right)$$

Как правильно записать общее решение?

Свободные переменные записываются в общее решение «сами по себе» и строго на своих местах. В данном случае свободные переменные $x_2,\ x_4$ следует записать на второй и четвертой позиции:

$$\left(-\frac{3}{2}x_2-\frac{1}{10}x_4+\frac{3}{5};\ x_2;\ \frac{4}{5}x_4+\frac{1}{5};\ x_4\right)$$

Полученные же выражения для базисных переменных $x_1=-\frac{3}{2}x_2-\frac{1}{10}x_4+\frac{3}{5}$ и $x_3=\frac{4}{5}x_4+\frac{1}{5}$, очевидно, нужно записать на первой и третьей позиции:

$$\left(\boxed{-\frac{3}{2}x_2-\frac{1}{10}x_4+\frac{3}{5}};\ x_2;\ \boxed{\frac{4}{5}x_4+\frac{1}{5}};\ x_4\right)$$

Придавая свободным переменным $x_2,\ x_4$ **произвольные значения**, можно найти бесконечно много **частных решений**. Самыми популярными значениями являются нули, поскольку частное решение получается проще всего. Подставим $x_2=0,\ x_4=0$ в общее решение:

$$\left(-0-0+\frac{3}{5};\ 0;\ 0+\frac{1}{5};\ 0\right)$$

$\left(\frac{3}{5};0;\frac{1}{5};0\right)$ – частное решение.

Другой парочкой являются единицы, подставим решение: $x_2=1,\ x_4=1$ в общее

$$\left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{10}+\frac{3}{5};\ 1;\ \frac{4}{5}+\frac{1}{5};\ 1\right)$$

$(-1;1;1;1)$ – еще одно частное решение.

Легко заметить, что система уравнений имеет **бесконечно много решений** (так как свободным переменным мы можем придать *любые* значения)

Каждое частное решение должно удовлетворять **каждому** уравнению системы

Что такое однородная система линейных уравнений?

Ответ напрашивается сам собой. Система линейных уравнений является однородной, если свободный член **каждого** уравнения системы равен нулю. Например:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 \qquad + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Совершенно ясно, что **однородная система всегда совместна**, то есть всегда имеет решение. И, прежде всего, в глаза бросается так называемое *тривиальное* решение давайте выясним, нет ли у данной системы каких-нибудь других решений:

Пример 1

Решить однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 \qquad + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Решение: чтобы решить однородную систему необходимо записать **матрицу системы** и с помощью элементарных преобразований привести её к ступенчатому виду. Обратите внимание, что здесь отпадает необходимость записывать вертикальную черту и нулевой столбец свободных членов – ведь что ни делай с нулями, они так и останутся нулями:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на –2. К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на –3.

(2) К третьей строке прибавили вторую строку, умноженную на –1.

Делить третью строку на 3 не имеет особого смысла.

В результате элементарных преобразований получена эквивалентная однородная система $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ \quad 3x_2 - 7x_3 = 0 \\ \qquad\quad 3x_3 = 0 \end{cases}$, и, применяя обратный ход метода Гаусса, легко убедиться, что решение единственно.

Ответ: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

Сформулируем очевидный критерий: однородная система линейных уравнений имеет **только тривиальное решение**, если **ранг матрицы системы** (в данном случае 3) равен количеству переменных (в данном случае x_1, x_2, x_3 – 3 шт.).

Пример 3

Решить однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Решение: запишем матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведём её к ступенчатому виду. Первое действие направлено не только на получение единичного значения, но и на уменьшение чисел в первом столбце:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & -6 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

(1) К первой строке прибавили третью строку, умноженную на –1. Ко второй строке прибавили третью строку, умноженную на –2. Слева вверху я получил единицу с «минусом», что зачастую намного удобнее для дальнейших преобразований.
(2) Первые две строки одинаковы, одну из них удалили. Честное слово, не подгонял решение – так получилось. Если выполнять преобразования шаблонно, то *линейная зависимость* строк обнаружилась бы чуть позже.
(3) К третьей строке прибавили вторую строку, умноженную на 3.
(4) У первой строки сменили знак.
В результате элементарных преобразований получена эквивалентная система:

$$\begin{cases} x_1 \qquad - 4x_3 = 0 \\ \qquad 2x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

Алгоритм работает точно так же, как и для **неоднородных систем**. Переменные x_1, x_2, «сидящие на ступеньках» – главные, переменная x_3, которой не досталось «ступеньки» – свободная.
Выразим базисные переменные через свободную переменную:

$$\begin{cases} x_1 \qquad - 4x_3 = 0 \\ \qquad 2x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4x_3 \\ 2x_2 = -7x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4x_3 \\ x_2 = -\frac{7}{2}x_3 \end{cases}$$

Ответ: общее решение: $\left(4x_3; -\frac{7}{2}x_3; x_3\right)$

Тривиальное решение входит в общую формулу, и записывать его отдельно излишне.

Фундаментальная система решений однородной системы уравнений

Фундаментальная система решений – это множество *линейно независимых* векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3, \dots, \overline{a}_n$, **каждый** из которых является решением однородной системы, кроме того, решением также является *линейная комбинация* данных векторов $c_1\overline{a}_1 + c_2\overline{a}_2 + c_3\overline{a}_3 + \dots + c_n\overline{a}_n$, где $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ – произвольные действительные числа.

Количество векторов n фундаментальной системы рассчитывается по формуле:

$n =$ Количество неизвестных системы – Ранг матрицы системы

Однако <u>в практических заданиях гораздо удобнее ориентироваться на следующий признак</u>: количество векторов n фундаментальной системы равно количеству свободных неизвестных.

Представим общее решение Примера $\left(4x_3; -\frac{7}{2}x_3; x_3\right)$ в векторной форме. Свободная переменная в данном случае одна, поэтому фундаментальная система решений состоит из единственного вектора $\overline{a}_1$. Как его найти? Для этого свободной переменной нужно придать произвольное ненулевое значение. Проще всего, конечно же, выбрать $x_3 = 1$ и получить: $\overline{a}_1 = \left(4 \cdot 1; -\frac{7}{2} \cdot 1; 1\right) = \left(4; -\frac{7}{2}; 1\right)$.

Координаты вектора $x_1 = 4,\ x_2 = -\frac{7}{2},\ x_3 = 1$ должны удовлетворять **каждому** уравнению системы, и будет не лишним в этом убедиться.

Ответ следует записать в виде *линейной комбинации* векторов фундаментальной системы. В нашей ситуации *линейная комбинация* состоит из одинокого слагаемого. Общее решение однородной системы я буду обозначать через вектор $\overline{x}_{OO}$ (подстрочный индекс расшифровывается «Общее Однородной»).

Ответ: общее решение: $\overline{x}_{OO} = c_1\overline{a}_1 = c_1 \cdot \left(4; -\frac{7}{2}; 1\right)$, где $c_1 \in \Re$ (любое вещественное число)

Пример

Решить однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} -4x_2+x_3+7x_4=0 \\ -2x_1-7x_2+2x_3+10x_4=0 \\ -x_1-x_2+x_3-5x_4=0 \\ -5x_1-22x_2+5x_3+43x_4=0 \end{cases}$$

Ответ записать с помощью фундаментальной системы решений

Решение: *запишем матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем её ступенчатому виду:*

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 & 7 \\ -2 & -7 & 2 & 10 \\ -1 & -1 & 1 & -5 \\ -5 & -22 & 5 & 43 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ -2 & -7 & 2 & 10 \\ 0 & -4 & 1 & 7 \\ -5 & -22 & 5 & 43 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 0 & 20 \\ 0 & -4 & 1 & 7 \\ 0 & -17 & 0 & 68 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

(1) У третьей строки сменили знак и переместили её на 1-е место.
(2) Ко 2-й и 4-й строкам прибавили первую строку, умноженную на 2 и 5 соответственно.
(3) Вторую строку разделили на –5, 4-ю строку разделили на –17.
(4) Вторая и 4-я строки одинаковы, последнюю строку удалили. К третьей строке прибавили вторую строку, умноженную на 4.

$x_1,\ x_2,\ x_3$ *– базисные переменные;*

x_4 *– свободная переменная.*

Выразим базисные переменные через свободную переменную.

Из последних двух уравнений:

$x_3=9x_4,\quad x_2=4x_4$ *– подставим в первое уравнение:*

$x_1+x_2-x_3+5x_4=0$

$x_1+4x_4-9x_4+5x_4=0$

$x_1=0$

Таким образом, общее решение: $(0;\ 4x_4;\ 9x_4;\ x_4)$

Найдем вектор фундаментальной системы решений. Для этого выберем в качестве значения свободной неизвестной $x_4=1$:

$\bar{a}_1=(0;4;9;1)$

Ответ: *общее решение однородной системы уравнений:*

$\bar{x}_{oo}=c_1\bar{a}_1=c_1\cdot(0;4;9;1)$, *где* $c_1\in\Re$ *(любое действительное число).*

Взаимосвязь решений неоднородной и соответствующей однородной системы уравнений

Представьте двух близких родственниц: неоднородную систему (у которой хотя бы одно число правой части отлично от нуля) и такую же систему – только справа одни нули (однородную систему). Нетрудно предположить, что если системы отличаются лишь столбцом свободных членов, то между их решениями должна существовать тесная связь. И это действительно так! Материал целесообразнее рассмотреть на конкретной задаче,

Пример

Дана система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4=0 \\ x_1+2x_2+2x_3-x_4=3 \\ 3x_1+6x_2+5x_4=3 \\ 4x_1+8x_2-x_3+8x_4=3 \end{cases}$$

Требуется:

1) найти общее решение;

2) используя результат предыдущего пункта, найти общее решение соответствующей однородной системы и записать его в векторной форме.

Решение:

1) Запишем расширенную матрицу системы (не зеваем нолик в третьей строке) и с помощью элементарных преобразований приведём её к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & -1 & 8 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 3 \end{array}\right)$$

(1) Ко второй строке прибавили первую строку, умноженную на –1. К третьей строке прибавили первую строку, умноженную на –3. К четвёртой строке прибавили первую строку, умноженную на –4.

(2) Последние три строки одинаковы, две из них удалили.

Обратным ходом метода Гаусса получим общее решение:

x_1, x_3 – базисные переменные;

x_2, x_4 – свободные переменные.

Выразим базисные переменные через свободные переменные. Из 2-го уравнения:

$3x_3-4x_4=3 \Rightarrow 3x_3=4x_4+3 \Rightarrow x_3=\frac{4}{3}x_4+1$ – подставим в 1-е уравнение:

$$x_1+2x_2-x_3+3x_4=0$$

$$x_1+2x_2-\left(\frac{4}{3}x_4+1\right)+3x_4=0$$

$$x_1+2x_2-\frac{4}{3}x_4-1+3x_4=0$$

$$x_1+2x_2+\frac{5}{3}x_4-1=0$$

$$x_1=-2x_2-\frac{5}{3}x_4+1$$

Общее решение неоднородной системы обозначим через x_{OH} («Общее Неоднородной»).

Ответ: $x_{OH}=\left(-2x_2-\frac{5}{3}x_4+1;\ x_2;\ \frac{4}{3}x_4+1;\ x_4\right)$

2) Во второй части задания требуется найти общее решение x_{OO} такой же, только однородной системы $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4=0 \\ x_1+2x_2+2x_3-x_4=0 \\ 3x_1+6x_2+5x_4=0 \\ 4x_1+8x_2-x_3+8x_4=0 \end{cases}$, причём по условию необходимо использовать ответ предыдущего пункта.
Выполнять элементарные преобразования заново, разумеется, не нужно.

Правило: общее решение неоднородной системы x_{OH} равно сумме общего решения соответствующей однородной системы x_{OO} и какого-либо частного решения неоднородной системы $x_{ЧН}$:

$$x_{OH}=x_{OO}+x_{ЧН}$$

Откуда легко выражается общее решение нашей однородной системы:

$$x_{OO}=x_{OH}-x_{ЧН}$$

Найдём какое-нибудь частное решение $x_{ЧН}$ неоднородной системы. Проще всего взять нулевые значения свободных переменных $x_2=0,\ x_4=0$:

$$x_{ЧН}=\left(-2\cdot 0-\frac{5}{3}\cdot 0+1;\ 0;\ \frac{4}{3}\cdot 0+1;\ 0\right)=(1;\ 0;\ 1;\ 0)$$

Таким образом, общее решение соответствующей однородной системы:

$$x_{OO}=x_{OH}-x_{ЧН}=\left(-2x_2-\frac{5}{3}x_4+1;\ x_2;\ \frac{4}{3}x_4+1;\ x_4\right)-(1;\ 0;\ 1;\ 0)=$$

$$=\left(-2x_2-\frac{5}{3}x_4+1-1;\ x_2-0;\ \frac{4}{3}x_4+1-1;\ x_4-0\right)=\left(-2x_2-\frac{5}{3}x_4;\ x_2;\ \frac{4}{3}x_4;\ x_4\right)$$

Представим x_{OO} в векторной форме. Поскольку у нас две свободные переменные, то фундаментальная система решений будет состоять из двух векторов.
Пойдём классическим путём:
Рассмотрим пару значений свободных переменных $x_2=1,\ x_4=0$ и получим первый вектор:

$$\bar{a}_1=\left(-2\cdot 1-\frac{5}{3}\cdot 0;\ 1;\ \frac{4}{3}\cdot 0;\ 0\right)=(-2;\ 1;\ 0;\ 0)$$

– координаты данного вектора удовлетворяют каждому уравнению однородной системы (всегда желательна проверка!).

Теперь рассматриваем пару $x_2 = 0,\ x_4 = 1$ и получаем второй вектор:

$\bar{a}_2 = \left(-2\cdot 0 - \frac{5}{3}\cdot 1;\ 0;\ \frac{4}{3}\cdot 1;\ 1\right) = \left(-\frac{5}{3};\ 0;\ \frac{4}{3};\ 1\right)$ – координаты данного вектора также удовлетворяют каждому уравнению однородной системы (тоже проверяем!).

И вообще – любая *линейная комбинация* векторов фундаментальной системы $c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2$, где c_1, c_2 – произвольные действительные числа, является решением данной системы:

Ответ: $\bar{x}_{OO} = c_1\cdot(-2;\ 1;\ 0;\ 0) + c_2\cdot\left(-\frac{5}{3};\ 0;\ \frac{4}{3};\ 1\right)$, где $c_1, c_2 \in \Re$

Иными словами, если взять два любых вещественных числа, например, $c_1 = 1,\ c_2 = -1$, то получится вектор частного решения однородной системы:

$\bar{x}_{ЧО} = 1\cdot(-2;\ 1;\ 0;\ 0) - 1\cdot\left(-\frac{5}{3};\ 0;\ \frac{4}{3};\ 1\right) = \left(-2 - \left(-\frac{5}{3}\right);\ 1 - 0;\ 0 - \frac{4}{3};\ 0 - 1\right) = \left(-\frac{1}{3};\ 1;\ -\frac{4}{3};\ -1\right)$, то есть набор $x_1 = -\frac{1}{3},\ x_2 = 1,\ x_3 = -\frac{4}{3},\ x_4 = -1$ удовлетворяет каждому уравнению однородной системы.

Если хотите избежать дробей, то при нахождении вектора $\bar{a}_2$ *следует выбрать значения* $x_2 = 0,\ x_4 = 3$ *и получить второй вектор в виде:*

$\bar{a}_2 = \left(-2\cdot 0 - \frac{5}{3}\cdot 3;\ 0;\ \frac{4}{3}\cdot 3;\ 3\right) = (-5;\ 0;\ 4;\ 3)$

В этом случае ответ запишется в эквивалентной форме:

$\bar{x}_{OO} = c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2 = c_1\cdot(-2;\ 1;\ 0;\ 0) + c_2\cdot(-5;\ 0;\ 4;\ 3)$, *где* $c_1, c_2 \in \Re$

МИРЭА
Российский технологический университет

Спасибо за внимание!