Экзаменационный билет №3

1. (6 баллов) Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. (6 баллов) Найти фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений $\begin{cases} 4x_1 - 11x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$.

3. (7 баллов) Найти образ, ядро, ранг и дефект линейного оператора $\hat{A}: L \to L$, где $L = \{f(x) = a + be^x + ce^{-x}: a, b, c \in R\}$, $\hat{A}f(x) = f''(x) - f(x)$.

4. (8 баллов) Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\hat{A}: L \to L$, где $L = \{f(x) = a\,sin\,x + b\,cos\,x : a, b \in R\}$, $\hat{A}f(x) =$
$= f(x - \pi)$.

5. (7 баллов) Исследовать квадратичную форму
$\Phi(\bar{x}) = 4x_1^2 - 4x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$ на знакоопределенность.

6. (8 баллов) В двумерном евклидовом пространстве матрица Грама и векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ в базисе $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ соответственно равны

$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \bar{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{y} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$. Найти длины векторов $\bar{x}, \bar{y}$ и угол между ними.

7. (8 баллов) Ортогональным преобразованием переменных приведите квадратичную форму $\Phi(x_1, x_2) = -3x_1^2 - 2\sqrt{2}x_1x_2 - 2x_2^2$ к каноническому виду.