Лекция 12
Ортогональное преобразование квадратичной формы

Ортогональное преобразование квадратичной формы

Продолжим приводить квадратичную форму к каноническому виду.

Любую квадратичную форму $Q(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ с действительными *(как мы оговорили)* коэффициентами

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

можно привести к каноническому виду:

$Q(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$, где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ – собственные числа матрицы A *(тоже действительные)*.

Такое приведение осуществляется с помощью линейного преобразования (замен):

$$x_1 = e_{11}y_1 + e_{12}y_2 + \dots + e_{1n}y_n$$

$$x_2 = e_{21}y_1 + e_{22}y_2 + \dots + e_{2n}y_n$$

…

$x_n = e_{n1}y_1 + e_{n2}y_2 + \dots + e_{nn}y_n$, коэффициенты которого ***(по столбцам!)*** – есть координаты соответствующих *ортонормированных* собственных векторов матрицы A:

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ \dots \\ e_{n1} \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \\ \dots \\ e_{n2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \bar{e}_n = \begin{pmatrix} e_{1n} \\ e_{2n} \\ \dots \\ e_{nn} \end{pmatrix}$$

Данные векторы *нормированы* (имеют единичную длину) и попарно *ортогональны*
(грубо говоря, перпендикулярны); отсюда и название – метод ортогонального преобразования.

Напоминаю распространённую матричную запись $x = Py$, где:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ и } P = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{n1} & e_{n2} & \dots & e_{nn} \end{pmatrix}$$

– матрица ортогонального преобразования.

Пример 10

Привести квадратичную форму к каноническому виду методом ортогонального преобразования
$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$

Найти матрицу соответствующего преобразования.

Решение: запишем **матрицу формы**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

и из уравнения

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$ найдём её **собственные числа**:

$(1-\lambda)(1-\lambda) - (-2)\cdot(-2) = 0$

$(1-\lambda)^2 - 4 = 0$

$(1-\lambda)^2 = 4$

Очевидно, что $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 3$, таким образом:

$Q(y_1, y_2) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = -y_1^2 + 3y_2^2$ – квадратичная форма $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$ в каноническом виде.

Найдём соответствующее линейное преобразование. Для этого нужно отыскать **собственные векторы** матрицы A:

1) Если

$\lambda = \lambda_1 = -1$

, то получаем **системy линейных уравнений**:
$\begin{cases} 2\alpha - 2\beta = 0 \\ -2\alpha + 2\beta = 0 \end{cases}$, откуда следует, что $\alpha = \beta$.

Полагая

$\alpha = \beta = 1$, запишем первый собственный вектор

$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
: – **координаты удобно записывать именно в столбец!** Сразу вычислим длину вектора (скоро потребуется):
$|\bar{u}_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

2) Если $\lambda = \lambda_2 = 3$, то имеем систему:
$\begin{cases} -2\alpha - 2\beta = 0 \\ -2\alpha - 2\beta = 0 \end{cases}$, из которой следует, что $\beta = -\alpha$

Пусть $\alpha = 1$, тогда $\beta = -1$ и

$\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ – второй собственный вектор. Его длина:
$|\bar{u}_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

Если матрица формы имеет <u>различные</u> собственные числа, то соответствующие собственные векторы попарно ортогональны.
Убедимся в справедливости этого утверждения для нашей пары, вычислив их **скалярное произведение**:
$\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 1 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{u}_1 \perp \bar{u}_2$

Поскольку длины векторов $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ не равны единице, то их нужно *нормировать*, т.е. найти *коллинеарные* им векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ единичной длины.
Для этого каждую координату собственного вектора делим на его длину:

$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ на

$$|\bar{u}_1| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix};$$

$\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ на

$$|\bar{u}_2| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Проверим, что длины полученных векторов действительно равны единице:

$$|\bar{e}_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1, \quad |\bar{e}_2| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

, ч.т.п.

Теперь <u>последовательно</u> помещаем координаты векторов

$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix}$ в <u>столбцы</u> матрицы:

$$P = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

– это и есть матрица выполненного ортогонального преобразования, в <u>строках</u> которой находятся «игрековые» коэффициенты линейных замен:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2$$
$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_2.$$

Ответ: $Q(y_1, y_2) = -y_1^2 + 3y_2^2$,

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Полученный результат можно проверить:

1) непосредственной подстановкой

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2$$ в форму $x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right)^2 - 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}y_1y_2 + \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}y_1y_2 + \frac{1}{2}y_2^2 - 4\left(\frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2\right) =$$

$$= y_1^2 + y_2^2 - 2y_1^2 + 2y_2^2 = -y_1^2 + 3y_2^2$$

2) либо с помощью **знакомой формулы**:

$$P^T AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = B$$

– получив «каноничную» матрицу.

Справка: *матрица ортогонального преобразования квадратичной формы относится к классу так называемых* ***ортогональных матриц*** *(Вики), которые встречаются не только в этой теме. Ортогональная матрица обладает рядом интересных свойств, в частности, её определитель равен +1 либо –1, а* ***транспонированная матрица*** *совпадает с* ***обратной матрицей***.

А сейчас обратим внимание на **следующий момент**: канонический вид $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$ и алгоритм решения никак не регламентируют порядок расположения собственных чисел, и поэтому **форму можно привести к такому виду не единственным способом**. Так, если в прорешанном примере перечислить собственные числа в другом порядке: $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -1$ (никто ж не запрещает), то получится другой, тоже канонический вид

$Q(y_1, y_2) = 3y_1^2 - y_2^2$. При этом нормированные собственные векторы меняются местами:

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

и матрица линейного преобразования будет другой

: $$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$. В строках этой матрицы находятся «игрековые» коэффициенты соответствующих линейных замен:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2$$

$$x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2$$

Желающие могут выполнить прямую подстановку в $x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$ и «на выходе» получить $3y_1^2 - y_2^2$.

П р и м е р 5. Привести квадратичную форму

$$4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$$

к каноническому (диагональному) виду.

Р е ш е н и е. Матрица рассматриваемой квадратичной формы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения матрицы A, для чего составим и решим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4-\lambda)\cdot(1-\lambda)-4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4-5\lambda+\lambda^2-4=0 \Rightarrow \lambda^2-5\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=0, \quad \lambda_2=5.$$

Найдем соответствующие этим числам собственные векторы $\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$ матрицы A.

Пусть $\lambda_1 = 0$. Тогда находим:

$$(A|\bar{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{array}\right)(-2) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Следовательно,

$$\bar{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, пусть $\lambda_2 = 5$.

Тогда находим:

$$(A|\overline{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array}\right)(2) \to \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Следовательно, соответствующий числу $\lambda_2 = 5$ собственный вектор имеет вид:

$$\overline{h}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ортонормируем векторы $\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$.

Нетрудно видеть, что векторы $\bar{h}_1$ и $\bar{h}_2$ ортогональны. Действительно, вычисляя их скалярное произведение, получаем:

$$\bar{h}_1 \cdot \bar{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 = 2 - 2 = 0.$$

Найдем длины векторов $\bar{h}_1$ и $\bar{h}_2$:

$$|\bar{h}_1| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5};$$

$$|\bar{h}_2| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{5}.$$

Таким образом, ортонормированными по отношению к векторам $\bar{h}_1$ и $\bar{h}_2$ будут следующие векторы:

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}; \qquad \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу B, столбцами которой являются векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$:

$$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Выполним с предложенной в примере квадратичной формой преобразование переменных по формулам:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} y_2 \qquad x_2 = -\frac{2}{\sqrt{5}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} y_2 .$$

Матрицей этого преобразования является матрица B.

Тогда квадратичная форма $4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$ примет диагональный вид с матрицей

$$A_1 = B^T \cdot A \cdot B =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 10/\sqrt{5} \\ 0 & 5/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, квадратичная форма $4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$ имеет следующий канонический вид: $5y_2^2$.

Ответ: $5y_2^2$.

Пример 15

Привести квадратичную форму к каноническому виду методом ортогонального преобразования

$2x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$

Найти соответствующее преобразование

Решение начинается точно так же: запишем матрицу формы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

и найдём её собственные числа:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

определитель раскрою по 1-й строке:

$$(2-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1-\lambda \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)\cdot[(-1-\lambda)(2-\lambda)-4] - 2(2(2-\lambda)+2) - (4+(-1-\lambda)) = 0$$

напоминаю полезный технический приём – в первом слагаемом, не нужно спешить раскрывать скобки:

$$(2-\lambda)\cdot[(1+\lambda)(\lambda-2)-4] - 2(4-2\lambda+2) - (4-1-\lambda) = 0$$

$$(2-\lambda)\cdot(\lambda^2-\lambda-6) - 2(6-2\lambda) - (3-\lambda) = 0$$

$$(2-\lambda)\cdot(\lambda^2-\lambda-6) - 4(3-\lambda) - (3-\lambda) = 0$$

$$(2-\lambda)\cdot(\lambda^2-\lambda-6) - 5(3-\lambda) = 0$$

решив **квадратное уравнение**, раскладываем трёхчлен на множители:

$$(2-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-3) + 5(\lambda-3) = 0$$

$$(\lambda-3)\cdot[(2-\lambda)\cdot(\lambda+2)+5] = 0$$

$$(\lambda-3)(4-\lambda^2+5) = 0$$

$$(\lambda-3)(9-\lambda^2) = 0$$

$$(\lambda-3)(3-\lambda)(3+\lambda) = 0$$

Порядок собственных чисел не имеет значения, и поэтому я выберу вариант:

$\lambda_1 = \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -3$ – чтобы красивее записать канонический вид:

$3y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2$

Найдём ортогональное линейное преобразование. Сложность задачи состоит в том, что **если среди собственных чисел есть кратные, то ортогональность найденных собственных векторов не гарантирована**, и в «неудачном» случае нам придётся предпринять меры по их *ортогонализации*.

1-2) Если

$\lambda = \lambda_{1,2} = 3$, то получаем систему:

$$\begin{cases} -\alpha + 2\beta - \gamma = 0 \\ 2\alpha - 4\beta + 2\gamma = 0 \\ -\alpha + 2\beta - \gamma = 0 \end{cases}$$, которая фактически состоит из одного уравнения.

Выберем в качестве **базисной** переменную «альфа» и выразим её через свободные переменные:

$\alpha = 2\beta - \gamma$. Запишем **общее решение** в столбец:

$$\begin{pmatrix} 2\beta - \gamma \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Теперь нам нужно найти **векторы фундаментальной системы**.

Для значений $\beta = 1, \gamma = 0$ получаем:

$$\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ – первый вектор фундаментальной системы;

и для $\beta = 0, \gamma = 1$:

$$\bar{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ – второй вектор.

Легко видеть, что оба вектора удовлетворяют системе (уравнению $\alpha = 2\beta - \gamma$) и, естественно, являются собственными. Вычислим их **скалярное произведение**:

$\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2 = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = -2 \neq 0$, значит, данные векторы НЕ ортогональны, что нас не устраивает.

Поэтому эту пару векторов следует *ортогонализовать*.

Поскольку любая *линейная комбинация* векторов фундаментальной системы **тоже** является решением системы (уравнения $\alpha = 2\beta - \gamma$), то рассмотрим вектор $\bar{f}_1 + \mu \cdot \bar{f}_2$, где μ – *пока ёщё* неизвестный числовой коэффициент, и составим следующее скалярное произведение, которое должно быть равно нулю:

$(\bar{f}_1 + \mu \cdot \bar{f}_2) \cdot \bar{f}_2 = 0$

по свойствам скалярного произведения:

$\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2 + \mu \cdot \bar{f}_2 \cdot \bar{f}_2 = 0$

откуда выражаем и находим:

$$\mu = -\frac{\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2}{\bar{f}_2 \cdot \bar{f}_2} = -\frac{2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{(-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1} = -\frac{-2}{2} = 1$$

Таким образом, в качестве первого собственного вектора выбираем:

$$\bar{u}_1 = \bar{f}_1 + \mu \cdot \bar{f}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и в качестве второго:

$$\bar{u}_2 = \bar{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

видно:

$\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = -1 + 0 + 1 = 0$ – что полученные векторы действительно ортогональны

С третьим собственным вектором всё прозрачно:

3) Если $\lambda = \lambda_3 = -3$, то получаем систему:

$$\begin{cases} 5\alpha + 2\beta - \gamma = 0 \\ 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \\ -\alpha + 2\beta + 5\gamma = 0 \end{cases}$$

из 2-го уравнения выразим $\gamma = -\alpha - \beta$ – подставим в 1-е и 3-е уравнения:

$$\begin{cases} 5\alpha + 2\beta - (-\alpha - \beta) = 0 \\ -\alpha + 2\beta + 5(-\alpha - \beta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6\alpha + 3\beta = 0 \\ -6\alpha - 3\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta = -2\alpha$$

Пусть

$$\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta = -2 \quad \Rightarrow \quad \gamma = -1 - (-2) = 1$$

Таким образом, третий собственный вектор

$$\bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

. Не забываем о проверке – устно или на черновике подставляем его координаты в каждое уравнение системы.

И проверяем, ортогонален ли он ранее найденным векторам

$$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}:$$

$$\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_3 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 = 1 - 2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{u}_1 \perp \bar{u}_3$$

$$\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_3 = -1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 = -1 + 0 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{u}_2 \perp \bar{u}_3$$

Осталось вычислить длины векторов и при необходимости их нормировать:

$$|\bar{u}_1| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3} \neq 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{e}_1 = \frac{\bar{u}_1}{|\bar{u}_1|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$|\bar{u}_2| = \sqrt{(-1)^2+0^2+1^2} = \sqrt{2} \neq 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{e}_2 = \frac{\bar{u}_2}{|\bar{u}_2|} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$|\bar{u}_3| = \sqrt{1^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{6} \neq 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{e}_3 = \frac{\bar{u}_3}{|\bar{u}_3|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Таким образом, матрица ортогонального преобразования:

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Ответ:

$3y_1^2+3y_2^2-3y_3^2$ и преобразование в виде прямых замен:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_3$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 \qquad\qquad - \frac{2}{\sqrt{6}}y_3$$

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_3$$

Проверка

Но подставлять всё это в $2x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ что-то не хочется :) Однако, проверка нужна,

$$P^T AP = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = B$$

И здесь есть ещё один интересный момент. В рассмотренной задаче векторы фундаментальной системы можно выбрать бесчисленным количеством способов, и поэтому мы можем построить бесконечно много ортогональных преобразований, которые приводят форму к виду $3y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2$. Но так бывает, конечно, не всегда.

И задача для самостоятельного решения, тоже с кратными собственными числами, ибо с разными получится как-то совсем скучно:

ПРИМЕР ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Пример

Найти ортогональные линейные замены, приводящие форму к каноническому виду

$$x_1^2+3x_2^2+4x_3^2-2\sqrt{3}x_1x_2$$

Пример 16

Найти ортогональные линейные замены, приводящие форму к каноническому виду
$x_1^2+3x_2^2+4x_3^2-2\sqrt{3}x_1x_2$

Пример 16. ***Решение*** *запишем матрицу формы*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$ *и найдём её собственные числа:*

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}=0$$

определитель выгодно раскрыть по 3-й строке или 3-му столбцу:

$$(4-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 1-\lambda & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$(4-\lambda)\cdot\left[(1-\lambda)(3-\lambda)-3\right]=0$$

$$(4-\lambda)\cdot(\lambda^2-4\lambda+3-3)=0$$

$$(4-\lambda)\cdot(\lambda^2-4\lambda)=0$$

$$(4-\lambda)\cdot\lambda(\lambda-4)=0$$

$\lambda_1=\lambda_2=4,\quad \lambda_3=0$ *– собственные числа, таким образом:*

$4y_1^2+4y_2^2$ *– форма* $x_1^2+3x_2^2+4x_3^2-2\sqrt{3}x_1x_2$ *в каноническом виде.*

Найдём собственные векторы:

1-2) Если $\lambda = \lambda_{1,2} = 4$*, то получаем систему:*

$$\begin{cases} -3\alpha - \sqrt{3}\beta + 0\cdot\gamma = 0 \\ -\sqrt{3}\alpha - \beta + 0\cdot\gamma = 0 \\ 0\cdot\alpha + 0\cdot\beta + 0\cdot\gamma = 0 \end{cases}$$

, из которой очевиден собственный вектор $\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Второй вектор найдём для $\gamma = 0$ *из соотношения* $\beta = -\sqrt{3}\alpha$.

Пусть

$$\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta = -\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 = 0\cdot 1 + 0\cdot(-\sqrt{3}) + 1\cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{u}_1 \perp \bar{u}_2$$

3) Если $\lambda = \lambda_3 = 0$*, то:*

$$\begin{cases} \alpha - \sqrt{3}\beta + 0\cdot\gamma = 0 \\ -\sqrt{3}\alpha + 3\beta + 0\cdot\gamma = 0 \\ 0\cdot\alpha + 0\cdot\beta + 4\cdot\gamma = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 0,\ \alpha = \sqrt{3}\beta$$

Пусть

$$\beta = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \bar{u}_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Проверим, что полученный вектор ортогонален двум первым векторам:

$$\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_3 = 0\cdot\sqrt{3} + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{u}_1 \perp \bar{u}_3$$

$$\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_3 = 1\cdot\sqrt{3} + (-\sqrt{3})\cdot 1 + 0\cdot 0 = \sqrt{3} - \sqrt{3} + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{u}_2 \perp \bar{u}_3$$

Первый вектор уже имеет единичную длину, поэтому:

$$\bar{e}_1 = \bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

другие векторы нужно нормировать:

$$|\bar{u}_2| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2 + 0^2} = \sqrt{1+3+0} = \sqrt{4} = 2 \neq 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\bar{u}_3| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2 + 0^2} = 2 \neq 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, матрица ортогонального преобразования:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$x_1 = \frac{1}{2}y_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_3$$

$$x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3$$

$$x_3 = y_1$$

Проверим результат прямой подстановкой в форму

$x_1^2+3x_2^2+4x_3^2-2\sqrt{3}x_1x_2$:

$$\left(\frac{1}{2}y_2+\frac{\sqrt{3}}{2}y_3\right)^2+3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}y_2+\frac{1}{2}y_3\right)^2+4y_1^2-2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}y_2+\frac{\sqrt{3}}{2}y_3\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}y_2+\frac{1}{2}y_3\right)=$$

$$=\frac{1}{2}y_2^2+\frac{\sqrt{3}}{2}y_2y_3+\frac{3}{4}y_3^2+3\left(\frac{3}{4}y_2^2-\frac{\sqrt{3}}{2}y_2y_3+\frac{1}{4}y_3^2\right)+4y_1^2-2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}y_2^2-\frac{2}{4}y_2y_3+\frac{\sqrt{3}}{4}y_3^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}y_2^2+\frac{\sqrt{3}}{2}y_2y_3+\frac{3}{4}y_3^2+\frac{9}{4}y_2^2-\frac{3\sqrt{3}}{2}y_2y_3+\frac{3}{4}y_3^2+4y_1^2+\frac{6}{4}y_2^2+\sqrt{3}y_2y_3-\frac{6}{4}y_3^2=$$

сгруппируем вместе и приведём подобные слагаемые:

$$=4y_1^2+\left(\frac{1}{2}y_2^2+\frac{9}{4}y_2^2+\frac{6}{4}y_2^2\right)+\left(\frac{3}{4}y_3^2-\frac{6}{4}y_3^2+\frac{3}{4}y_3^2\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}y_2y_3-\frac{3\sqrt{3}}{2}y_2y_3+\sqrt{3}y_2y_3=$$

$$=4y_1^2+\frac{16}{4}y_2^2+0\cdot y_3^2-\sqrt{3}y_2y_3+\sqrt{3}y_2y_3=4y_1^2+4y_2^2$$

, что и требовалось проверить.

Спасибо за внимание!