Линейная алгебра и аналитическая геометрия
Лекция 10

Тема: Плоскость в пространстве

Список литературы

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика, Т.1, Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М., Дрофа, 2003.
2. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М.Физматлит, 2002.
3. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики.,М.,Лань.2005.
4. Письменный Д.П. Конспект лекций по высшей математике, М., Айрис-пресс, 2017.
5. Электронный ресурс http://mathprofi.ru

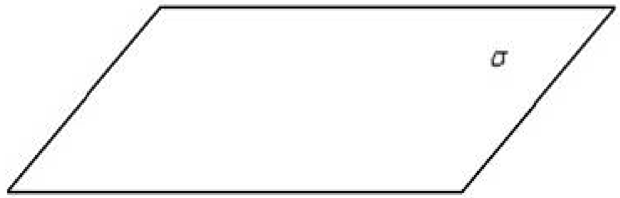
Учебно-методические пособия:

6. Выборнов А.Н. Матрицы, определители, системы линейных уравнений, М., МГУПИ, 2002.
7. Выборнов А.Н. Векторы, скалярное, векторное, смешанное произведение, М., МГУПИ, 2009.
8. Архипов Н.В., Головешкин В.А., Егиазаров Ю. И., Зюзко Т.Н. Линейная алгебра и аналитическаягеометрия. Учебное пособие для студентов заочной формы обучения для самостоятельной подготовки к выполнению домашних контрольных работ. М.: МГАПИ, 2005. (есть в электронном виде – http://mgupihm.ru)
9. Баланкина Е.С. Кривые и поверхности второго порядка, М.:МГУПИ, 2008.
10. Загинайко В.А. Аналитическая геометрия. Учебное пособие., М.: МГУПИ, 2008.

Лекция 10

Тема: Плоскость в пространстве

Схематически плоскость можно нарисовать в виде параллелограмма, что создаёт впечатление пространства:



Плоскость бесконечна, но у нас есть возможность изобразить лишь её кусочек. На практике помимо параллелограмма также прорисовывают овал или даже облачко. Реальные плоскости, которые мы рассмотрим в практических примерах, могут располагаться как угодно – мысленно возьмите чертёж в руки и покрутите его в пространстве, придав плоскости любой наклон, любой угол.

Обозначения: плоскости принято обозначать маленькими греческими буквами $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.

В ряде случаев для обозначения плоскостей удобно использовать те же греческие буквы с нижними подстрочными индексами, например, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

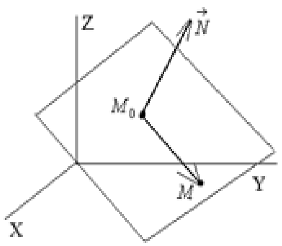
Очевидно, что плоскость однозначно определяется тремя различными точками, не лежащими на одной прямой. Поэтому достаточно популярны трёхбуквенные обозначения плоскостей – по принадлежащим им точкам, например, KLM, $A_1A_2A_3$ и т.д. Нередко буквы заключают в круглые скобки: $(KLM), (A_1A_2A_3)$, чтобы не перепутать плоскость с другой геометрической фигурой.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.

Определение. Нормалью к плоскости называется любой ненулевой вектор, перпендикулярный данной плоскости.

Пусть плоскость проходит через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{N} = \{A; B; C\}$.

Точка $M(x; y; z)$ лежит на плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\vec{N} = \{A; B; C\}$ и $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ перпендикулярны.



Векторы $\vec{N} = \{A; B; C\}$ и $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю, то есть $\vec{N} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$.

Тогда уравнение плоскости записываем в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (1)$$

пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка AB перпендикулярно этому отрезку, если координаты точек $A(1;6;9)$, $B(5;4;7)$.

Будем рассуждать следующим образом. Чтобы найти уравнение плоскости, мы должны знать точку, через которую эта плоскость проходит, и вектор, перпендикулярный этой плоскости. Вектором, перпендикулярным данной плоскости, будет вектор $\vec{N} = \vec{AB} = \{5-1;4-6;7-9\} = \{4;-2;-2\}$, поскольку, по условию задачи, плоскость перпендикулярна отрезку AB. В качестве точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ возьмем середину AB (это единственная точка, о которой нам известно, что она принадлежит плоскости).

Имеем $x_0 = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{1+5}{2} = 3$, $y_0 = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{6+4}{2} = 5$, $z_0 = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{9+7}{2} = 8$.

Таким образом, $M_0(3;5;8)$, и уравнение примет вид:

$$4(x-3) + (-2)(y-5) + (-2)(z-8) = 0; \quad 4x - 2y - 2z + 14 = 0; \quad 2x - y - z + 7 = 0$$

Выясним для примера вопрос, проходит ли эта плоскость через точку М(7;3;0).

Имеем $2 \cdot 7 - 3 - 0 + 7 = 18 \neq 0$, значит, эта плоскость не проходит через указанную точку.

Пример для самостоятельного решения

Задача Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;-2;4)$ перпендикулярно вектору $\overline{a}\{2,-1,4\}$.

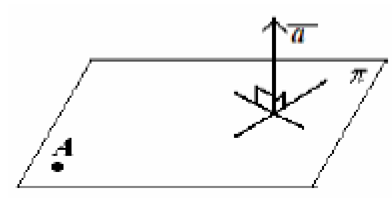
Задача Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;-2;4)$ перпендикулярно вектору $\overline{a}\{2,-1,4\}$.

Решение. Для составления уравнение плоскости используем формулу), где вектор $\overline{a}$ нормальный вектор плоскости. В результате получаем следующее уравнение

$$2(x-2)-1(y+2)+4(z-4)=0\,,$$

$$2x-y+4z-22=0\,.$$

Ответ. $2x-y+4z-22=0$.

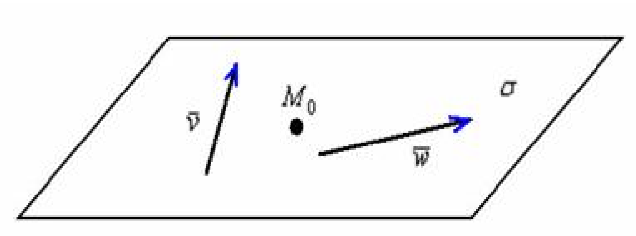


Как составить уравнение плоскости по точке и двум неколлинеарным векторам.

Рассмотрим точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и два неколлинеарных вектора $\overline{v}(v_1; v_2; v_3), \overline{w}(w_1; w_2; w_3)$. **Уравнение плоскости**, которая проходит через точку M_0 параллельно векторам $\overline{v}, \overline{w}$, **выражается формулой**:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & v_1 & w_1 \\ y-y_0 & v_2 & w_2 \\ z-z_0 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

! ***Примечание***: *под выражением «вектор параллелен плоскости» подразумевается, что вектор можно отложить и в самой плоскости.*



Обратите внимание, что точка и два коллинеарных вектора не определят плоскость однозначно (векторы будут свободно «вертеться» вокруг точки и зададут бесконечно много плоскостей).

Задача: Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3;1;2)$ параллельно векторам $\vec{a} = \{1;-2;2\}$, $\vec{b} = \{1;3;1\}$.

Чтобы составить уравнение плоскости, мы должны знать точку и нормаль. Точка у нас имеется, а вот нормали нет. Но зато мы имеем два параллельных плоскости вектора (не коллинеарных друг другу). Теперь вспомним свойства векторного произведения векторов: векторное произведение двух векторов направлено перпендикулярно плоскости, в которой эти векторы расположены.

Следовательно, в качестве нормали $\vec{N}$ может быть взято векторное произведение векторов $\vec{a} = \{1;-2;2\}$, $\vec{b} = \{1;3;1\}$. Имеем

$$\vec{N} = \left[\vec{a} \times \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-8) - \vec{j}(-1) + \vec{k}\,5 = \{-8;1;5\}.$$

Уравнение плоскости примет вид

$$-8(x-3) + 1(y-1) + 5(z-2) = 0; \quad -8x + y + 5z + 13 = 0.$$

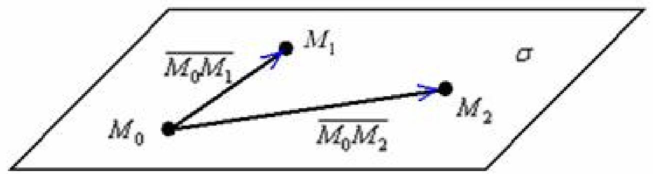
Как составить уравнение плоскости по трём точкам

Любые ли три точки пространства задают плоскость? Нет. Во-первых, точки должны быть различными. А во-вторых, они не должны лежать на одной прямой (сразу все три).

Уравнение плоскости, проходящей через три различные точки $M_0(x_0; y_0; z_0), M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2)$, которые не лежат на одной прямой, **можно составить по формуле**:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & x_1-x_0 & x_2-x_0 \\ y-y_0 & y_1-y_0 & y_2-y_0 \\ z-z_0 & z_1-z_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0$$

На самом деле это разновидность предыдущего способа, смотрим на картинку:



Если известны три различные точки, не лежащие на одной прямой, то легко найти два неколлинеарных вектора, параллельных данной плоскости:

$\overline{M_0M_1}(x_1-x_0; y_1-y_0; z_1-z_0)$

$\overline{M_0M_2}(x_2-x_0; y_2-y_0; z_2-z_0)$

Задача. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3;1;2)$, $B(1;4;5)$, $C(2;1;5)$.

Как видим, в наличии целых три точки и ни одного вектора. Но если сообразить, что вектор, соединяющий две точки, параллелен плоскости, в которой эти точки лежат, то задача сводится к предыдущей. Следовательно, нашей плоскости параллельны вектор $\vec{AB}=\{1-3;4-1;5-2\}=\{-2;3;3\}$ и вектор $\vec{AC}=\{2-3;1-1;5-2\}=\{-1;0;3\}$.

Тогда

$$\vec{N}=\left[\vec{AB}\times\vec{AC}\right]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=\vec{i}\,(9)-\vec{j}(-3)+\vec{k}\,3=\{9;3;3\}.$$

Уравнение примет вид

$$9(x-3)+3(y-1)+3(z-2)=0;\quad 3x+y+z-12=0$$

Заметим, что нетрудно получить общую формулу уравнения плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1;y_1;z_1), M_2(x_2;y_2;z_2), M_3(x_3;y_3;z_3)$, из следующих соображений.

Точка $M(x;y;z)$ лежит в данной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\vec{M_1M}=\{x-x_1;y-y_1;z-z_1\}$, $\vec{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$, $\vec{M_1M_3}=\{x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1\}$ являются компланарными, а значит, их смешанное произведение равно нулю.

Тогда получаем $\vec{M_1M}\cdot\vec{M_1M_2}\cdot\vec{M_1M_3}=0$

и окончательно – в координатах:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \qquad (2)$$

Задача для самостоятельного решения

Задача Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(2, 4, 1)$, $M_2(1, 0, 4)$, $M_3(-1, -1, 2)$

Задача Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(2,4,1)$, $M_2(1,0,4)$, $M_3(-1,-1,2)$

Решение.

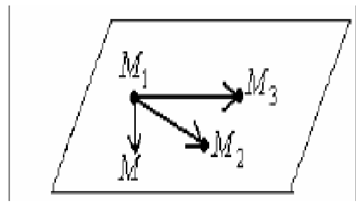


Рисунок 49

Находим уравнение плоскости, используя формулу (8.4)

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z-1 \\ 1-2 & 0-4 & 4-1 \\ -1-2 & -1-4 & 2-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z-1 \\ -1 & -4 & 3 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-2)\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} - (y-4)\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2)\cdot 11 - (y-4)\cdot 8 + (z-1)\cdot(-7) = 0,$$

$11x - 8y - 7z + 17 = 0$ - уравнение искомой плоскости.

Ответ. $11x - 8y - 7z + 17 = 0$.

Общее уравнение плоскости.

Определение. **Общим уравнением поверхности первого порядка** в пространстве называется уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Теорема. 1) Всякая плоскость может быть задана в виде уравнения поверхности первого порядка, и 2) всякое уравнение поверхности первого порядка является уравнением некоторой плоскости.

Доказательство.

1) Первая часть этой теоремы доказывается просто. Для всякой плоскости можно указать лежащую в ней точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и нормаль $\vec{N} = \{A; B; C\}$. Тогда, согласно (1), уравнение такой плоскости имеет вид $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Раскроем скобки и обозначим $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Тогда уравнение примет вид $Ax + By + Cz + D = 0$.

2) Теперь перейдем ко второй части теоремы. Пусть имеется уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Будем считать для определенности $A \neq 0$.

Перепишем уравнение в виде $Ax + By + Cz + D = 0$; $A(x + D/A) + By + Cz = 0$; наконец, $A[x - (-D/A)] + B(y - 0) + C(z - 0) = 0$.

Согласно (1) данное уравнение является уравнением плоскости, проходящей через точку $M_0(-D/A; 0; 0)$ перпендикулярно вектору $\vec{N} = \{A; B; C\}$.

Следствие.

Если имеется уравнение плоскости вида $Ax + By + Cz + D = 0$, то вектор $\vec{N} = \{A; B; C\}$ перпендикулярен данной плоскости.

Уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$ называется **общим уравнением плоскости**.

Ещё раз повторю, что плоскость бесконечно продолжается во все стороны, и у нас есть возможность изобразить только её часть.

МИРЭА Российский технологический университет

Рассмотрим простейшие уравнения плоскостей:

$z = 0$

Как понимать данное уравнение? Вдумайтесь: «зет» ВСЕГДА, при любых значениях «икс» и «игрек» равно нулю. Это уравнение координатной плоскости XOY. Действительно, формально уравнение можно переписать так:

$0 \cdot x + 0 \cdot y + z = 0$, откуда хорошо видно, что нам все равно, какие значения принимают «икс» и «игрек», важно, что «зет» равно нулю.

Аналогично:

$x = 0$ – уравнение координатной плоскости YOZ;

$y = 0$ – уравнение координатной плоскости XOZ.

Немного усложним задачу, рассмотрим плоскость $Ax + D = 0$ (здесь и далее предполагаем, что числовые коэффициенты не равны нулю). Перепишем уравнение в виде:

$x = -\frac{D}{A}$. Как его понимать? «Икс» ВСЕГДА, при любых значениях «игрек» и «зет» равно некоторому числу $-\frac{D}{A}$. Эта плоскость параллельна координатной плоскости YOZ. Например, плоскость $x = 2$ параллельна плоскости YOZ и проходит через точку $(2; 0; 0)$.

Аналогично:

$By + D = 0$ – уравнение плоскости, которая параллельна координатной плоскости XOZ;

$Cz + D = 0$ – уравнение плоскости, которая параллельна координатной плоскости XOY.

Добавим членов: $Ax + By + D = 0$. Уравнение можно переписать так: $Ax + By + 0 \cdot z + D = 0$, то есть «зет» может быть любым. Что это значит? «Икс» и «игрек» связаны соотношением $Ax + By + D = 0$, которое прочерчивает в плоскости XOY некоторую прямую). Поскольку «зет» может быть любым, то эта прямая «тиражируется» на любой высоте. Таким образом, уравнение

$Ax + By + D = 0$ определяет плоскость, параллельную координатной оси OZ

Аналогично:

$Ax + Cz + D = 0$ – уравнение плоскости, которая параллельна координатной оси OY;

$By + Cz + D = 0$ – уравнение плоскости, которая параллельна координатной оси OX.

Если свободные члены D нулевые, то плоскости будут непосредственно проходить через соответствующие оси. Например, классическая «прямая пропорциональность»: $y = x$. Начертите в плоскости XOY прямую $y = x$ и мысленно размножьте её вверх и вниз (так как «зет» любое). Вывод: плоскость, заданная уравнением $y = x$, проходит через координатную ось OZ.

Завершаем обзор: плоскость

$Ax + By + Cz = 0$

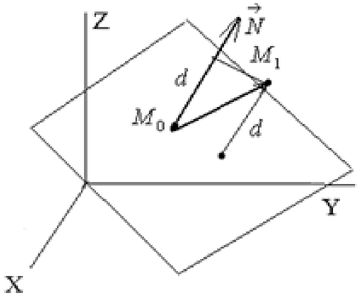
проходит через начало координат. Ну, здесь совершенно очевидно, что точка $O(0; 0; 0)$ удовлетворяет данному уравнению.

И, наконец, случай, который изображён на чертеже: $Ax + By + Cz + D = 0$ – плоскость дружит со всеми координатными осями, при этом она всегда «отсекает» треугольник, который может располагаться в любом из восьми октантов.

Расстояние от произвольной точки до плоскости, заданной общим уравнением.

Пусть имеется плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ и точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$. Требуется определить расстояние от указанной точки до плоскости.

Рассмотрим произвольную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ на плоскости. Имеем $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Расстояние d от точки M_1 до плоскости равно модулю проекции вектора $\vec{M_0M_1} = \{x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0\}$ на вектор $\vec{N} = \{A; B; C\}$, перпендикулярный данной плоскости.



Имеем

$$d = \left|np_{\vec{N}} \vec{M_0M_1}\right| = \frac{|\vec{N} \cdot \vec{M_0M_1}|}{|\vec{N}|} = \left|\frac{A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|,$$

преобразуя, получаем

$$d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right| = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|.$$

Задача . Вычислить расстояние от точек $M_1(3, 4, -7)$, $M_2(2, 4, 9)$, $M_3(5, 1, 0)$ до плоскости $2x - y + 2z - 9 = 0$.

Решение. Для нахождения расстояния от точки до плоскости используем формулу

В результате получаем:

$$d_1 = \frac{|2 \cdot 3 - 4 + 2(-7) - 9|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|-21|}{3} = 7;$$

$$d_2 = \frac{|2 \cdot 2 - 4 + 2 \cdot -9|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|9|}{3} = 3; \quad d_3 = \frac{|2 \cdot 5 - 1 + 2 \cdot 0 - 9|}{3} = 0.$$

Следовательно, точка M_3 лежит на данной плоскости.

Ответ. $d_1 = 7, d_2 = 3, d_3 = 0$.

Задача для самостоятельного решения

Задача Найти расстояние от точки $M_0(1,2,4)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(4,2,1), M_2(-3,6,3), M_3(-1,0,4)$.

Задача Найти расстояние от точки $M_0(1,2,4)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(4,2,1), M_2(-3,6,3), M_3(-1,0,4)$.

Решение. Сначала найдем уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(4,2,1), M_2(-3,6,3), M_3(-1,0,4)$, для этого используем решение задачи

Находим уравнение плоскости, используя формулу

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-2 & z-1 \\ -3-4 & 6-2 & 3-1 \\ -1-4 & 0-2 & 4-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-4 & y-2 & z-1 \\ -7 & 4 & 2 \\ -5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-4)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} -7 & 4 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-4)\cdot 16 - (y-2)\cdot(-11) + (z-1)\cdot 34 = 0,$$

$$16x + 11y + 34z - 120 = 0.$$

Расстояние от точки до плоскости находим по формуле

$$d = \frac{|16\cdot 1 + 11\cdot 2 + 34\cdot 4 - 120|}{\sqrt{16^2 + 11^2 + 34^2}} = \frac{54}{\sqrt{1533}}.$$

Угол ψ между плоскостями

Пусть даны две плоскости, заданные общими уравнениями

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Тогда векторы $\vec{N_1} = \{A_1; B_1; C_1\}$ $\vec{N_2} = \{A_2; B_2; C_2\}$ являются нормалями этих плоскостей. Угол ψ между плоскостями равен углу между их нормалями.

Тогда формула для определения угла имеет вид

$$\cos\psi = \pm\frac{\vec{N_1}\cdot\vec{N_2}}{\left|\vec{N_1}\right|\cdot\left|\vec{N_2}\right|} = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности и параллельности плоскостей

Условие перпендикулярности плоскостей имеет вид
$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Плоскости параллельны или совпадают тогда и только тогда, когда векторы $\vec{N}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ $\vec{N}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ коллинеарны. При этом условие совпадения плоскостей имеет вид $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ (при наличии нулей равенство отношений понимаем как равенство перекрестных произведений), а условие параллельности записывается в виде $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$.

Интересно посмотреть на эти условия с точки зрения рангов матриц. Координаты точек пересечения плоскостей (как и любых геометрических объектов) удовлетворяют обоим уравнениям, т.е. являются решениями *системы*

$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$, или,

как мы записывали системы ранее, $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = -D_2 \end{cases}$.

Условие $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ означает, что ранг как основной, так и расширенной матрицы системы равен 1 (строки пропорциональны). Т.е. решения существуют и описываются с помощью $3 - 1 = 2$ свободных переменных (образуют плоскость).

Условие $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ означает, что ранг основной матрицы системы равен единице, а расширенной – двум. Такая система несовместна.

Наконец, если равенство $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ не выполнено, то ранг как основной, так и расширенной матрицы системы равен 2. Т.е. решения существуют и описываются с помощью $3 - 2 = 1$ свободной переменной (составляют прямую).

Задача для самостоятельного решения

Задача Укажите, какие из следующих плоскостей параллельны и перпендикулярны?

$\pi_1 : 2x + 2y - z + 6 = 0$;

$\pi_2 : -2x + 2y + 10 = 0$;

$\pi_3 : 8x + 8y - 4z + 6 = 0$;

$\pi_4 : 2x + 2y + z + 6 = 0$.

Задача Укажите, какие из следующих плоскостей параллельны и перпендикулярны?

$\pi_1 : 2x + 2y - z + 6 = 0$; $\pi_3 : 8x + 8y - 4z + 6 = 0$;

$\pi_2 : -2x + 2y + 10 = 0$; $\pi_4 : 2x + 2y + z + 6 = 0$.

Решение. Запишем координаты нормальных векторов соответствующих заданным плоскостям:

$\overline{n}_1 = \{2, 2, -1\}$, $\overline{n}_2 = \{-2, 2, 0\}$; $\overline{n}_3 = \{8, 8, -4\}$; $\overline{n}_4 = \{2, 2, 1\}$.

Из условия параллельности плоскостей

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

следует, что $\pi_1 \nparallel \pi_2$, так как координаты нормальных векторов непропорциональны, т.е.

$$\frac{2}{-2} \neq \frac{2}{2} \neq \frac{-1}{0}.$$

Проверяем условие параллельности для плоскостей π_1 и π_3

$$\frac{2}{8} = \frac{2}{8} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \pi_1 \parallel \pi_3.$$

Аналогично проверяем условие и для плоскостей π_1 и π_4, π_2 и π_3, π_2 и π_4, π_3 и π_4. Получаем, что все эти плоскости не параллельны.

Используя условие перпендикулярности плоскостей $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$, выясним какие плоскости перпендикулярны:

$2 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 = 0$, следовательно плоскости π_1 и π_2 перпендикулярны;

$2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \neq 0$, значит плоскости π_1 и π_4 не перпендикулярны;

$(-2) \cdot 8 + 2 \cdot 8 + 0 \cdot (-4) = 0$ - π_2 и π_3 перпендикулярны;

$(-2) \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 0$ - π_2 и π_4 перпендикулярны;

$8 \cdot 2 + 8 \cdot 2 + (-4) \cdot 1 \neq 0$ - π_3 и π_4 не перпендикулярны.

Задача Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости $4x-4y+2z-3=0$ и отстоящей от нее на 5 единиц.

Решение. Уравнение искомой плоскости запишем так:

$4x-4y+2z+D=0$.

Найдем расстояние между плоскостями, для чего возьмем произвольную точку первой плоскости и определим ее расстояние до второй. Положив $x=0$, $y=0$, из уравнения $4x-4y+2z-3=0$ найдем $z=\frac{3}{2}$; получим точку $M\left(0,\ 0,\ \frac{3}{2}\right)$. Расстояние этой точки до плоскости $4x-4y+2z+D=0$ определяется формулой

$$d=\frac{\left|4\cdot 0-4\cdot 0+2\cdot\frac{3}{2}+D\right|}{\sqrt{16+16+4}}=\frac{|3+D|}{6}.$$

Так как по условию $d=5$, то для определения D имеем уравнение

$$5=\frac{|3+D|}{6} \text{ или } 30=\pm(3+D),$$

откуда

$D_1=27$, $D_2=-33$.

Подставляя в искомое уравнение найденные значения D получим две плоскости

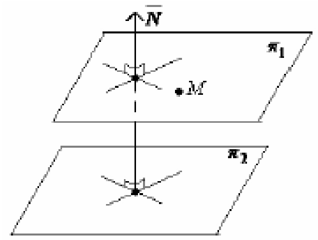
$4x-4y+2z+27=0$ и $4x-4y+2z-33=0$.

Ответ. $4x-4y+2z+27=0$ и $4x-4y+2z-33=0$.

Задача для самостоятельного решения

Задача Через точку $M(2, 3, -1)$ провести плоскость, параллельную плоскости $2x - 3y + 5z - 4 = 0$

Задача Через точку $M(2, 3, -1)$ провести плоскость, параллельную плоскости $2x-3y+5z-4=0$



Решение. Уравнение связки плоскостей, проходящих через данную точку, имеет вид . В нашем случае оно будет таким:

$A(x-2)+B(y-3)+C(z+1)=0$.

Из условия параллельности двух плоскостей

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2},$$

получаем $\frac{A}{2}=\frac{B}{-3}=\frac{C}{5}(=k)$.

Заменяя в последнем уравнении A, B и C величинами, им пропорциональными, будем иметь

$2k(x-2)-3k(y-3)+5k(z+1)=0$

или окончательно после упрощений

$2x-3y+5z+10=0$.

Ответ. $2x-3y+5z+10=0$.

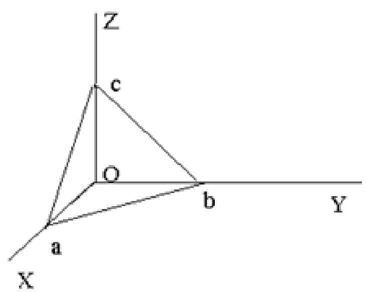
Неполные уравнения плоскости. Уравнение в отрезках

Пусть дано общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Если хотя бы один из коэффициентов равен нулю (что можно записать как $ABCD = 0$), то уравнение называется **неполным**.
Если $D = 0$, то плоскость проходит через начало координат.
Что происходит при обращении в нуль других коэффициентов, разберем чуть позже.

Рассмотрим случай, когда ни один из коэффициентов не равен нулю $ABCD \neq 0$. Уравнение перепишем в виде $Ax + By + Cz = -D$,

$$\frac{x}{\left(-\frac{D}{A}\right)} + \frac{y}{\left(-\frac{D}{B}\right)} + \frac{z}{\left(-\frac{D}{C}\right)} = 1,\qquad \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1},$$ где $a = \left(\frac{-D}{A}\right)$, $b = \left(\frac{-D}{B}\right)$, $c = \left(\frac{-D}{C}\right)$.

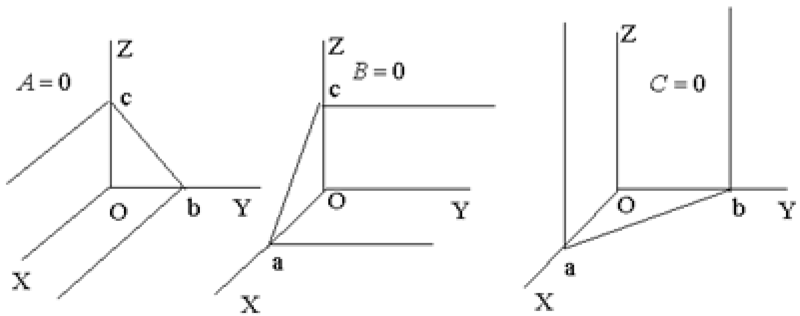
Выясним смысл параметров a, b и c. Найдем точки пересечения плоскости с осями координат.
При $x = 0$, $y = 0$ (ось Z) находим $z = c$,
при $y = 0$, $z = 0$ (ось X) $x = a$,
при $x = 0$, $z = 0$ (ось Y) $y = b$.



То есть a, b, c – это отрезки, которые отсекает плоскость на координатных осях. Поэтому уравнение $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ называется **уравнением плоскости в отрезках**.

В случае $A=0$ имеем $By+Cz=-D$, $\dfrac{y}{\left(-\dfrac{D}{B}\right)}+\dfrac{z}{\left(-\dfrac{D}{C}\right)}=1$, $\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$,

где $b=\left(\dfrac{-D}{B}\right)$, $c=\left(\dfrac{-D}{C}\right)$. То есть плоскость будет параллельна оси X.



В случае $B=0$ имеем $Ax+Cz=-D$,

$\dfrac{x}{\left(-\dfrac{D}{A}\right)}+\dfrac{z}{\left(-\dfrac{D}{C}\right)}=1$, $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=1$, где $a=\left(\dfrac{-D}{A}\right)$, $c=\left(\dfrac{-D}{C}\right)$.

То есть плоскость будет параллельна оси Y.

В случае $C=0$ имеем $Ax+By=-D$, $\dfrac{x}{\left(-\dfrac{D}{A}\right)}+\dfrac{y}{\left(-\dfrac{D}{B}\right)}=1$, $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$,

где $a=\left(\dfrac{-D}{A}\right)$, $b=\left(\dfrac{-D}{B}\right)$. То есть плоскость будет параллельна оси Y.

В случае $A=0$, $B=0$ имеем $Cz=-D$, $z=c$,

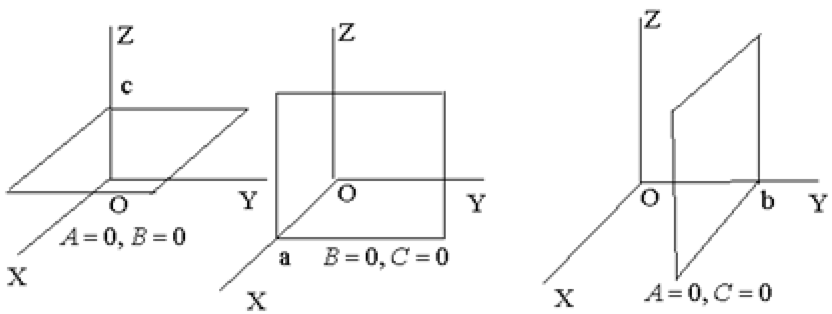
где $c=\left(\dfrac{-D}{C}\right)$. То есть плоскость будет перпендикулярна оси Z (и параллельна плоскости OXY).

В случае $B=0, C=0$ имеем $Ax=-D$, $x=a$,

где $a=\left(\dfrac{-D}{A}\right)$. То есть плоскость будет перпендикулярна оси X (и параллельна плоскости OYZ).

В случае $A=0, C=0$ имеем $By=-D$, $y=b$,

где $b=\left(\dfrac{-D}{B}\right)$. То есть плоскость будет перпендикулярна оси Y (и параллельна плоскости OXZ).



.

Спасибо за внимание!