МИРЭА Российский технологический университет

Линейная алгебра и аналитическая геометрия
Лекция 4

Тема: Изоморфизм линейных пространств. Линейные подпространства

Литература:

1. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах. – СПб: Издательство «Лань», 2008, 256с.
2. Кремер Н.Ш. и др. Высшая математика для экономистов: Практикум.– М.: Юнити-Дана, 2007, 479с.
3. Ефимов А.В., Поспелов А.С. и др. Сборник задач по математике. Ч. 1. – М.: Физматлит, 2001.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1 – М.: Оникс, 2006.

Изоморфизм линейных пространств

Пусть даны два линейных пространства V и U. Если между элементами $x \in V$ и $y \in U$ этих пространств установлено взаимно-однозначное соответствие, будем писать $x \leftrightarrow y$.

Два линейных пространства V и U называются ***изоморфными***, когда между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие такое, что если $x_1 \leftrightarrow y_1$, $x_2 \leftrightarrow y_2$, где $x_1, x_2 \in V$, $y_1, y_2 \in U$, то

1) $(x_1 + x_2) \leftrightarrow (y_1 + y_2)$;

2) $\alpha x_1 \leftrightarrow \alpha y_1$,

где α - действительное число.

Обозначение: $V \sim U$ - линейное пространство V изоморфно линейному пространству U.

Если $V \sim U$ и $x \leftrightarrow y$, где $x \in V$, а $y \in U$, то y называют ***образом*** элемента x, а x называют ***прообразом*** элемента y.

Отметим, что если $V \sim U$, то $\theta \to \theta'$, где θ и θ' - нулевые элементы пространств V и U. Примем без доказательства теорему о необходимом и достаточном условии изоморфизма двух линейных пространств.

Теорема 9.13 *Два линейных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.*

Все линейные пространства одной и той же размерности изоморфны между собой.

Таким образом, различные линейные пространства одной и той же размерности с алгебраической точки зрения тождественны.

Очевидно, очень важной является следующая теорема.

Теорема 9.14 *Если линейные пространства R и R' изоморфны, то линейно независимым элементам $x_1, ..., x_m$ пространства R соответствуют линейно независимые элементы $x'_1, ..., x'_m$ пространства R'.*

Доказательство. Предположим, что элементы $x_1, ..., x_m$ линейно независимы, а их образы $x'_1, ..., x'_m$ линейно зависимы. Тогда существует линейная комбинация элементов $x'_1, ..., x'_m$, равная нулевому элементу θ', не все коэффициенты которой равны нулю. В силу изоморфизма пространств R и R' эта линейная комбинация является образом линейной комбинации элементов $x_1, ..., x_m$ с теми же коэффициентами. С другой стороны, элемент θ' является образом нулевого элемента θ пространства R. Следовательно, указанная линейная комбинация элементов $x_1, ..., x_m$, не все коэффициенты которой равны нулю, равна нулевому элементу θ, и поэтому элементы $x_1, ..., x_m$ линейно зависимы, что противоречит условию. Полученное противоречие доказывает, что элементы $x'_1, ..., x'_m$ также линейно независимы.

Приведем примеры изоморфных линейных пространств:

1) Линейное пространство X геометрических векторов, выходящих из начала координат трехмерного пространства, с обычными операциями сложения векторов и умножения вектора на число изоморфно действительному арифметическому пространству K_3, так как каждому вектору $x \in X$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие вектор-столбец $x' = (x_1,\ x_2,\ x_3)^T$ его координат в некотором фиксированном базисе. При таком соответствии будут выполняться соотношения

$$x + y \leftrightarrow x' + y' = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ x_3 + y_3)^T;$$

$$\lambda x \leftrightarrow \lambda x' = (\lambda x_1,\ \lambda x_2,\ \lambda x_3)^T.$$

2) Линейное пространство M_{22} квадратных матриц второго порядка над полем P с обычными операциями сложения матриц и умножения матрицы на элементы поля P и арифметическое пространство K_4 над полем P изоморфны, так как каждой матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

из M_{22} во взаимно однозначное соответствие можно поставить вектор-столбец $\alpha = (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})^T$ из K_4 и при этом будут выполняться соотношения

$$A + B \leftrightarrow \alpha + \beta, \qquad \lambda A \leftrightarrow \lambda\alpha.$$

3) Линейное пространство $P_2(x)$ многочленов степени $n \le 2$ с действительными коэффициентами и с обычными операциями сложения многочленов и умножения многочлена на действительное число изоморфно действительному арифметическому пространству K_3, так как многочлену $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ можно поставить в соответствие вектор-столбец $(a_0, a_1, a_2)^T$, при этом будут выполняться соотношения

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) \leftrightarrow (a_0, a_1, a_2)^T + (b_0, b_1, b_2)^T,$$

$$\lambda(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \leftrightarrow \lambda(a_0, a_1, a_2)^T.$$

Подпространство линейного пространства

Введем понятие *подпространства.* Множество $W \subset V$ называется ***подпространством линейного пространства*** V, если выполняются следующие условия:

1) во множестве W определены те же операции, что и в множестве V;
2) если $x, y \in W$, то $x + y \in W$;
3) если $x \in W$, то $\alpha x \in W$.

Очевидно, всякое подпространство W линейного пространства V является линейным пространством, т.е. в W выполняются аксиомы I – VIII.

Прежде всего, в W имеется нулевой элемент θ: если $x \in W$, то $0x = \theta \in W$. Для любого элемента $x \in W$ имеется противоположный элемент $-x$: если $x \in W$, то $(-1)x = -x \in W$. Легко видеть, что аксиомы I – VIII для элементов множества W будут выполнены. Отметим, что нулевой элемент θ линейного пространства V образует подпространство данного пространства, которое называют *нулевым подпространством*. Само линейное пространство V можно рассматривать как подпространство этого пространства. Эти подпространства называют *тривиальными*, а все другие, если они имеются, - нетривиальными.

Приведем примеры нетривиальных подпространств линейных пространств.

1) Множество V_2 всех свободных векторов $a(a_1, a_2)$, параллельных некоторой плоскости, для которых обычным образом определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, является подпространством линейного пространства V_3.

2) Множество V_1 всех свободных векторов $a(a_1)$, параллельных некоторой прямой, представляет подпространство линейного пространства V_2.

3) Множество $\{P_{n-1}(x)\}$ всех алгебраических многочленов степени, не превышающей натурального числа $n-1$, является подпространством линейного пространства $\{P_n(x)\}$.

Свойства линейных подпространств

1°. Если $x_1, \ldots, x_k$ — элементы линейного подпространства W, то любая их линейная комбинация $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k$ также принадлежит W.

2°. Линейное подпространство W само является линейным пространством.

◄ Достаточно убедиться лишь в том, что нулевой элемент θ и элемент, противоположный произвольному элементу из W, принадлежат W. Действительно, эти элементы получаются умножением произвольного элемента $x \in W$ соответственно на 0 и на (–1): $\theta = 0x, \quad -x = (-1)x$. ►

3°. Размерность любого подпространства линейного пространства не превосходит размерности самого пространства.

◄ Действительно, линейно независимые элементы подпространства являются независимыми и во всем пространстве, а значит, максимальное число линейно независимых элементов подпространства не превосходит размерности всего пространства. ►

Замечание В любом линейном пространстве V всегда имеются два линейных подпространства: само линейное пространство V и *нулевое подпространство*, состоящее из единственного нулевого элемента θ. Эти линейные подпространства называют *несобственными* (или *тривиальными*), а все остальные линейные подпространства — *собственными*. ■

Линейна оболочка и ее свойства

Пусть в линейном пространстве V задана система элементов $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Рассмотрим в этом пространстве множество X, представленное линейными комбинациями этих элементов: $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k$.

Определение *Линейной оболочкой* $L(X)$ подмножества X линейного пространства V называют совокупность всевозможных линейных комбинаций $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k$ элементов $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$.

Обозначение: $\operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_k\} = L(X)$.

Примеры линейных оболочек:

1) линейная оболочка базисных векторов $\{e\} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ пространства V

$$L(e_1, \ldots, e_n) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$$

совпадает с самим пространством V;

2) линейная оболочка пары неколлинеарных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ пространства V^3: $L(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b}$ есть подпространство, состоящее из всех векторов, параллельных плоскости векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Теорема 9.15 *Линейная оболочка* L *системы векторов* $a_1, a_2, ..., a_k$ *является подпространством в* X.

Доказательство. Действительно, если векторы a и b принадлежат L, т.е. имеют представления

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k, \qquad b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + ... + \beta_k a_k,$$

то и векторы $a + b$ и λa имеют такие представления:

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1)a_1 + (\alpha_2 + \beta_2)a_2 + ... + (\alpha_k + \beta_k)a_k,$$

$$\lambda a = (\lambda\alpha_1)a_1 + (\lambda\alpha_2)a_2 + ... + (\lambda\alpha_k)a_k.$$

Следовательно, они принадлежат L, что и требовалось доказать.

Линейную оболочку L системы векторов $a_1, a_2, ..., a_k$ также называют *подпространством, порожденным этой системой векторов*, или *подпространством, натянутым на эту систему векторов*, и обозначают $L = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

Теорема 9.16 *Линейное подпространство конечномерного линейного пространства является конечномерным, и размерность подпространства не превышает размерности всего линейного пространства.*

Доказательство. Действительно, размерность конечномерного линейного пространства V может быть определена как максимальное количество линейно независимых векторов в этом пространстве. Очевидно, что максимальное количество линейно независимых векторов в любом подмножестве L в V не превышает максимального количества линейно независимых векторов в V. Отсюда следует утверждение теоремы.

Любое конечномерное линейное пространство порождается конечной системой векторов, например, любым своим базисом. Согласно доказанной теореме это верно и для всякого линейного подпространства линейного пространства.

Теорема 9.17 *Пусть L - подпространство n-мерного линейного пространства V. Любой базис $a_1, a_2, ..., a_k$ в L можно дополнить до базиса $a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}, ..., a_n$ всего линейного пространства V, причем линейному подпространству L принадлежат те и только те векторы, которые в указанном базисе имеют столбцы координат вида*

$$(x_1', x_2', ..., x_k', 0, ..., 0)^T. \qquad (9.19)$$

Доказательство. Действительно, любой базис в L, как и вообще любую линейно независимую систему векторов в V можно дополнить до базиса линейного пространства V. Если вектор x имеет столбец координат (9.19), то он имеет представление

$$x = x_1'a_1 + x_2'a_2 + ... + x_k'a_k + 0 \cdot a_{k+1} + ... + 0 \cdot a_n = x_1'a_1 + x_2'a_2 + ... + x_k'a_k$$

и, следовательно, принадлежит L как линейная комбинация векторов, принадлежащих L. Если вектор x принадлежит L, он может быть разложен по базису $a_1, a_2, ..., a_k$

$$x = x_1'a_1 + x_2'a_2 + ... + x_k'a_k$$

Это разложение в то же время является разложением вектора x в базисе $a_1, a_2, ..., a_n$ линейного пространства V, дающим столбец координат вида (9.19).

Линейная оболочка и однородная система линейных уравненийй

Линейное подпространство можно задать не только набором линейно независимых элементов, но и системами линейных уравнений.

Рассмотрим однородную систему k линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = 0, \end{cases}$$

которая имеет ненулевые решения. Пусть ранг однородной СЛАУ равен r. Тогда существует набор $n-r$ фундаментальных (нормальных) линейно независимых решений

$$e_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ \vdots \\ x_r^1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ \vdots \\ x_r^2 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad e_{n-r} = \begin{pmatrix} x_1^{n-r} \\ \vdots \\ x_r^{n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Эти независимые решения, являющиеся совокупностями из n чисел, можно представить как n-мерные линейно независимые элементы $e_1, e_2, \ldots, e_{n-r}$. Известно, что общее решение однородной СЛАУ записывается в виде линейной комбинации фундаментального набора решений. Если в качестве базиса некоторого линейного подпространства взять систему элементов $e_1, e_2, \ldots, e_{n-r}$, то все множество решений данной однородной СЛАУ и будет этим линейным подпространством, называемым *пространством решений однородной СЛАУ*. При этом размерность подпространства равна $n-r$ — числу линейно независимых элементов.

Пример Найти линейную оболочку множества решений однородной СЛАУ

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 5x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$$

◀ Ранг матрицы коэффициентов системы уравнений $r = 2$. Следовательно, размерность пространства решений $n - r = 5 - 2 = 3$ и фундаментальная система решений состоит из трех линейно независимых решений.

Выберем в качестве свободных переменных x_3, x_4, x_5. Тогда общее решение однородной СЛАУ имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -5/2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Векторы $e_1 = (-5/2,\ -2,\ 1,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}}$, $e_2 = (3/2,\ 3,\ 0,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}$ и $e_3 = (-2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$ образуют фундаментальный набор решений однородной СЛАУ, любое решение системы является их линейной комбинацией. Следовательно, линейная оболочка векторов e_1, e_2, e_3 и есть множество решений однородной СЛАУ, т. е. $L(e_1, e_2, e_3) = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3$. ▶

Однородную систему линейных уравнений, описывающую данное линейное подпространство L, называют ***общими уравнениями*** *этого подпространства*.

Например, составим общие уравнения линейного подпространства $L=\langle a_1, a_2\rangle$ в четырехмерном линейном пространстве V, если векторы a_1 и a_2 заданы своими координатами в некотором базисе $\boldsymbol{e}$:

$$[a_1]_e=(1,1,2,0)^T, \qquad [a_2]_e=(1,-1,0,2)^T.$$

Решение. Нетрудно убедиться в том, что система векторов a_1 и a_2 линейно независима и потому составляет базис в линейном подпространстве L. Дополним эту систему до базиса в линейном пространстве V векторами a_3 и a_4, в качестве которых; можно взять пару векторов из базиса e:

$$[a_3]_e=(0,0,1,0)^T, \qquad [a_4]_e=(0,0,0,1)^T.$$

Матрицей перехода от базиса e к базису $a=(a_1,a_2,a_3,a_4)$ является матрица

$$T=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&-1&0&0\\2&0&1&0\\0&2&0&1\end{pmatrix},$$

обратной к которой является матрица

$$T^{-1}=\begin{pmatrix}1/2&1/2&0&0\\1/2&-1/2&0&0\\-1&-1&1&0\\-1&1&0&1\end{pmatrix}.$$

В базисе a линейное подпространство описывается однородной системой из двух уравнений $x_3'=0$, $x_4'=0$, которая в матричной форме имеет вид:

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Применив формулу $x_a=T^{-1}x_e$, полученную систему преобразуем в систему

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2&1/2&0&0\\1/2&-1/2&0&0\\-1&-1&1&0\\-1&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

после умножения матриц – в систему

$$\begin{pmatrix}-1&-1&1&0\\-1&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases}-x_1-x_2+x_3=0\\-x_1+x_2+x_4=0,\end{cases}$$

описывающую линейное подпространство L в базисе e.

Общие уравнения линейного подпространства определяются неоднозначно: достаточно систему линейных уравнений заменить любой эквивалентной системой, чтобы получить другие общие уравнения того же линейного подпространства. В рассмотренном примере ответ зависит от того, какими векторами a_3 и a_4 мы дополняем систему a_1, a_2 до базиса.

Например, если положить

$$[a_3]_e = (0, 0, -1, -1)^T, \quad [a_4]_e = (0, 0, -1, 1)^T,$$

то, повторив все вычисления, получим уже другую систему линейных уравнений, описывающую заданное линейное подпространство L в базисе e, именно:

$$\begin{cases} x_1 - \dfrac{1}{2}x_3 - \dfrac{1}{2}x_4 = 0, \\ x_2 - \dfrac{1}{2}x_3 + \dfrac{1}{2}x_4 = 0. \end{cases}$$

Если подпространство задано общими уравнениями, то ***для построения базиса этого подпространства следует построить фундаментальную систему решений для общих уравнений подпространства***.

Если $a_1, a_2, ..., a_k$ – базис линейного подпространства L в линейном пространстве V, то L можно задать уравнением

$$x = t_1 a_1 + t_2 a_2 + ... + t_n a_n, \tag{9.20}$$

которое называют ***параметрическим уравнением подпространства L в векторной форме.***

Пусть векторы $a_1, a_2, ..., a_k$ заданы своими координатами в некотором базисе пространства V:

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \qquad a_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}.$$

Тогда векторное уравнение (9.20) в координатах можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + ... + a_{1k}t_k, \\ x_2 = a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + ... + a_{2k}t_k, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = a_{n1}t_1 + a_{n2}t_2 + ... + a_{nk}t_k. \end{cases} \tag{9.21}$$

Систему (9.21) называют ***параметрическими уравнениями подпространства L в координатной форме.***

Если из параметрических уравнений (9.21) подпространства L исключить параметры $t_1, t_2, ..., t_k$, получим *общие уравнения подпространства L*. Таким образом, мы пришли еще к одному способу получения общих уравнений подпространства.

Например, подпространство $L = \langle a_1, a_2 \rangle$, где

$a_1 = (1, 1, 2, 0)^T$, $a_2 = (1, -1, 0, 2)^T$,

зададим параметрическими уравнениями в векторной и координатной формах, а также общими уравнениями.

Решение: Векторное уравнение (9.20) в данном случае имеет вид:

$$x = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Переходя к координатам, получаем координатную форму, параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = t_1 + t_2, \\ x_2 = t_1 - t_2, \\ x_3 = 2t_1, \\ x_4 = 2t_2. \end{cases}$$

Исключив параметры t_1 и t_2, получим общие уравнения подпространства L:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Пересечение подпространств. Сумма подпространств

Пусть в линейном пространстве V даны подпространства L_1 и L_2. Множество $L_1 \cap L_2$ векторов, принадлежащих как L_1, так и L_2, является подпространством в V. Его называют ***пересечением подпространств*** L_1 и L_2.

Множество всех векторов x вида $x = a + b$, где $a \in L_1$, $b \in L_2$, называют ***суммой подпространств*** L_1 и L_2 и обозначают через $L_1 + L_2$. Если при этом пересечение $L_1 \cap L_2$ – нулевое подпространство, то сумму $L_1 + L_2$ называют ***прямой суммой*** и обозначают через $L_1 \oplus L_2$.

Теорема 9.19 *Сумма подпространств является подпространством.*

Доказательство. Пусть $x = a + b$, $y = c + d$, где $a, c \in L_1$, $b, d \in L_2$. Тогда

$$x + y = (a + c) + (b + d) \in L_1 + L_2,$$

поскольку

$$a + c \in L_1 \quad \text{и} \quad b + d \in L_2.$$

Аналогично для любого числа α имеем:

$$\alpha x = \alpha a + \alpha b \in L_1 + L_2,$$

так как

$$\alpha a \in L_1 \quad \text{и} \quad \alpha b \in L_2.$$

Таким образом, доказано, что сумма подпространств является подпространством.

Теорема 9.20 *Если сумма подпространств L_1 и L_2 в V является прямой, то представление любого вектора x в виде $x = a + b$, где $a \in L_1$, $b \in L_2$, единственно.*

В частном случае, $V = L_1 \oplus L_2$ каждый вектор $x \in V$ имеет представление $x = a + b$, причем единственное. В этом случае подпространства L_1 и L_2 называют ***прямыми дополнениями*** друг друга, а слагаемое $a \in L_1$ **-** ***проекцией вектора x на подпространство*** L_1 ***параллельно подпространству*** L_2.

Например, в пространстве K_4 построим какое-либо прямое дополнение L_2 к подпространству $L_1 = \langle a_1, a_2 \rangle$, где

$$a_1 = (1, 1, 1, 0)^T, \qquad a_2 = (1, 0, 1, 0)^T,$$

и найдем проекцию вектора $x = (2, 1, 5, 5)^T$ на L_1 параллельно L_2.

Решение. Векторы a_1 и a_2 линейно независимы и поэтому составляют базис в подпространстве L_1. Дополним систему векторов a_1, a_2 до базиса во всем пространстве V, например, векторами

$$b_1 = (0, 0, 1, 0)^T, \qquad b_2 = (0, 0, 0, 1)^T$$

и положим $L_2 = \langle b_1, b_2 \rangle$. Очевидно, что L_2 является искомым подпространством. Далее запишем векторное равенство

$$x = (a_1 + a_2) + (3b_1 + 5b_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

где $(2, 1, 2, 0)^T \in L_1$, $(0, 0, 3, 5)^T \in L_2$. Следовательно, проекцией вектора $x = (2, 1, 5, 5)^T$ на подпространство L_1 параллельно подпространству L_2 является вектор $x_1 = (2, 1, 2, 0)^T$.

Пусть $L_1 = \langle a_1, a_2, ..., a_k \rangle$, $L_2 = \langle b_1, b_2, ..., b_l \rangle$ - подпространства в линейном пространстве X. *Чтобы найти какой-либо базис в подпространстве* $L_1 + L_2$, *следует выделить какую-либо максимальную линейно независимую подсистему системы векторов*

$$a_1, a_2, ..., a_k, \qquad b_1, b_2, ..., b_l.$$

Для этого достаточно составить матрицу из координатных столбцов этих векторов и в этой матрице выделить какой-либо базисный минор. Векторы, на координатных столбцах которых находится базисный минор, образуют базис в подпространстве $L_1 + L_2$. Отметим, что базисный минор можно выбирать не в исходной, а преобразованной матрице (после выполнения последовательности элементарных преобразований строк).

Например, найдем базис суммы $L_1 + L_2$ подпространств $L_1 = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ и $L_2 = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, если

$$a_1 = (1, 1, 1, 1)^T, \quad a_2 = (1, 1, -1, -1)^T, \quad a_3 = (1, -1, 1, -1)^T,$$
$$b_1 = (1, -1, -1, 1)^T, \quad b_2 = (2, -2, 0, 0)^T, \quad b_3 = (3, -1, 1, 1)^T.$$

Решение. Составим матрицу

$$(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проводя элементарные преобразования строк матрицы, приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Видим, что ранг матрицы равен четырем, а один из ее базисных миноров располагается на векторах a_1, a_2, a_3, b_1. Следовательно, эти векторы составляют базис суммы $L_1 + L_2$.

Если пространства L_1 и L_2 заданы однородными системами уравнений, то пересечение $L_1 \cap L_2$ будет определяться системой, включаемую все уравнения двух систем. Любая фундаментальная система решений такой системы уравнений дает базис пересечения $L_1 \cap L_2$.

Например, найдем базис пересечения подпространства L_1, заданного системой уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \end{cases}$$

и подпространства L_2, заданного системой уравнений

$$\begin{cases} x_2 - x - 3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Составим систему уравнений, состоящую из всех уравнений систем подпространств L_1 и L_2

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 - x - 3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

и найдем ее общее решение

$$x = (x_4 - x_5, x_4 - x_6, x_4, x_4, x_5, x_6)^T.$$

Здесь три свободных неизвестных: x_4, x_5, x_6. Поэтому каждая фундаментальная система решений этой системы состоит из трех решений. Одну из фундаментальных систем решений составляют столбцы

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Они и представляют собой один из базисов подпространства $L_1 \cap L_2$.

Если подпространства L_1 и L_2 заданы как линейные оболочки систем векторов

$$L_1 = \langle a_1, a_2, ..., a_k \rangle, \ L_2 = \langle b_1, b_2, \ ..., b_l \rangle,$$

то при построении базиса пересечения $L_1 \cap L_2$ этих подпространств достаточно перейти к описанию этих подпространств общими уравнениями, а затем действовать, как в последнем примере: объединяя две однородные системы в одну, искать фундаментальную систему решений объединенной системы.

Существуют и другие способы построения базиса пересечения. Например, можно составить векторное уравнение

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_l b_l \qquad (9.22)$$

с неизвестными $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ и от него перейти к системе покоординатных уравнений. Это линейная однородная система. Построив фундаментальную систему решений этой системы, для каждого решения из ФСР вычислим, например, левую часть векторного уравнения. Получим систему векторов, порождающую линейное пространство $L_1 \cap L_2$. Теперь базис в $L_1 \cap L_2$ можно построить, выделив в этой системе максимальную линейно независимую подсистему. Отметим, что если система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно независима, то и построенная, как описано выше, система векторов, порождающая $L_1 \cap L_2$, будет линейно независимой. В этом случае дополнительно выделять максимальную линейно независимую подсистему не нужно.

В заключение примем без доказательства теорему о размерности суммы линейных пространств.

Теорема 9.21 *В конечномерном линейном пространстве V размерность суммы $L_1 + L_2$ подпространств L_1 и L_2 равна сумме размерностей этих подпространств минус размерность их пересечения, т.е.*

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2).$$

Спасибо за внимание!