Линейная алгебра и аналитическая геометрия
Лекция 8
Тема: Линейные операторы

Литература:

1. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах. – СПб: Издательство «Лань», 2008, 256с.
2. Кремер Н.Ш. и др. Высшая математика для экономистов: Практикум.– М.: Юнити-Дана, 2007, 479с.
3. Ефимов А.В., Поспелов А.С. и др. Сборник задач по математике. Ч. 1. – М.: Физматлит, 2001.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1 – М.: Оникс, 2006.

Ненулевой вектор x линейного пространства называется ***собственным вектором*** линейного оператора f этого пространства, если существует число k такое, что

$$f(x)=kx, \qquad (11.19)$$

причем k - действительное число для действительного линейного пространства и k - комплексное число в случае комплексного пространства. Число k называется ***собственным значением*** вектора x относительно оператора f. Равенство (11.16) можно записать в матричном виде

$$AX=kX, \qquad (11.$$

где A - матрица оператора f в некотором базисе; X - матрица-столбец координат собственного вектора x в том же базисе.

Ненулевая матрица-столбец X, удовлетворяющая уравнению (11.20), называется собственным вектором-столбцом матрицы A с собственным значением k.

Собственные значения и собственные векторы симметрической матрицы

Напомним, что *симметрической* называется матрица, элементы которой, симметричные относительно главной диагонали, равны между собой.

Теорема 11.9 *Корни характеристического уравнения действительной симметрической матрицы являются действительными числами.*

Доказательство. Если A - действительная симметрическая матрица, то $A^T = A$ и $\overline{A} = A$, где $\overline{A}$ - матрица, сопряженная матрице A; A^T - матрица, полученная транспонированием матрицы A. Пусть k - корень характеристического уравнения, $x(x_1, x_2, ..., x_n)$- собственный вектор данной квадратной матрицы порядка n. Найдем произведение $X^T A\overline{X}$, где X - матрица-столбец из координат вектора $x(x_1, x_2, ..., x_n)$, которые могут быть и комплексными числами; $\overline{X}$ - матрица, сопряженная матрице X, X^T - матрица-строка, полученная транспонированием матрицы X.

Применяя свойства транспонированных и сопряженных матриц, получаем

$$X^T A\overline{X} = X^T \overline{\overline{A}X} = X^T \overline{AX} = X^T \overline{kX} = X^T \overline{k}\,\overline{X} = \overline{k}\left(X^T \overline{X}\right),$$

$$X^T A\overline{X} = X^T A^T \overline{X} = (AX)^T \overline{X} = (kX)^T \overline{X} = k\left(X^T \overline{X}\right).$$

Из этих равенств следует, что

$$\overline{k}\left(X^T \overline{X}\right) = k\left(X^T \overline{X}\right), \quad \text{или} \quad \left(\overline{k} - k\right)\left(X^T \overline{X}\right) = 0.$$

Можно утверждать, что $X^T \overline{X} \neq 0$. Действительно,

$$X^T \overline{X} = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n) \cdot \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix} = \left(x_1 \overline{x_1} + x_2 \overline{x_2} + \dots + x_n \overline{x_n}\right),$$

или

$$X^T \overline{X} = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2,$$

где $|x_i|$ - модуль числа x_i $(i = 1, 2, ..., n)$. Поскольку X - ненулевой столбец, то $X^T \overline{X} \neq 0$. Из равенства $\left(\overline{k} - k\right)\left(X^T \overline{X}\right) = 0$ получаем $\overline{k} - k = 0$, или $\overline{k} = k$, т.е. k - действительное число.

Следствие. *Действительная симметрическая матрица имеет только действительные собственные векторы.*

Теорема 11.10 *Собственные векторы действительной симметрической матрицы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.*

Доказательство. Пусть $x(x_1, x_2, ..., x_n)$, $y(y_1, y_2, ..., y_n)$ - собственные векторы симметрической матрицы A порядка n, собственные значения которых k и m различны; X, Y - соответствующие векторы-столбцы из их координат. Найдем произведение $X^T AY$, пользуясь ассоциативным свойством умножения матриц:

$$X^T AY = X^T(AY) = X^T(mY) = mX^T Y,$$

$$X^T AY = (X^T A)Y = (X^T A^T)Y = (XA)^T Y = (kX)^T Y = k(X^T Y).$$

Из этих двух равенств следует, что

$$mX^T Y = k(X^T Y), \qquad \text{или} \qquad (m-k)X^T Y = 0.$$

Так как по условию $k \neq m$, т.е. $(m-k) \neq 0$, то $X^T Y = 0$, или

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n = 0.$$

Что и означает, что векторы x и y ортогональны.

Диагонализируемость линейного оператора

Линейный оператор называется ***оператором простой структуры,*** если существует базис, состоящий из собственных векторов этого оператора.

Оператор называется ***диагонализируемым***, если существует базис, в котором его матрица диагональная.

Теорема 11.11 *Для того, чтобы линейный оператор f был диагонализируемым, необходимо и достаточно, чтобы он был оператором простой структуры*.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть матрица A оператора f в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$ диагональная, т.е. имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Тогда $f(e_i) = \lambda_i e_i \quad (i = \overline{1, n})$. Таким образом, ненулевой вектор e_i удовлетворяет условию (11.19) и, следовательно, является собственным вектором оператора f с собственным значением λ_i.

Достаточность. Пусть $e_1, e_2, ..., e_n$ - базис пространства, состоящий из собственных векторов оператора с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, т.е. $f(e_i) = \lambda_i e_i \ (i = \overline{1, n})$. Следовательно, в рассматриваемом базисе оператор f имеет диагональную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Что и требовалось доказать.

Квадратная матрица A называется ***диагонализируемой в комплексном пространстве***, если существует невырожденная комплексная матрица T, такая, что матрица $T^{-1}AT$ диагональная.

Квадратная матрица A называется ***диагонализируемой в действительном пространстве***, если существует невырожденная действительная матрица T, такая, что матрица $T^{-1}AT$ - действительная диагональная матрица. Матрицу T будем называть ***матрицей, диагонализирующей матрицу*** A.

Характеристические многочлены матриц A и $T^{-1}AT$ совпадают, и характеристические числа диагональной матрицы равны ее диагональным элементам. Поэтому если матрица A диагонализируема, то

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ - характеристические числа матрицы A.

Теорема 11.12 *Пусть собственные значения* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ *матрицы* A *порядка* n, *кратности которых равны соответственно* $m_1, m_2, ..., m_s$ $(m_1 + m_2 + ... + m_s = n)$, *попарно различны. Если*

$$m_1 = n - r_1,\ m_2 = n - r_2,\ ...,\ m_s = n - r_s,$$

где $r_1, r_2, ..., r_s$ *- ранги матриц* $A - \lambda_1 E$, $A - \lambda_2 E$, ..., $A - \lambda_s E$ *соответственно, то матрица* A *диагонализируема.*

Доказательство. Рассмотрим линейный оператор $f : V \to V$ с матрицей A в некотором базисе

$$e_1, e_2, ..., e_n. \qquad (11.21)$$

В этом базисе координаты $x_1, x_2, ..., x_n$ собственного вектора оператора f с собственными значениями λ_i $\left(i = \overline{1, n}\right)$ находятся из матричного уравнения

$$(A - \lambda_i E)X = 0, \qquad (11.22)$$

где $X = (x_1\ x_2\ ...\ x_n)^T$.

Так как ранг $A - \lambda_i E$ равен r_i, то фундаментальная система решений уравнения (11.22) состоит из $n - r_i = m_i$ вектор-решений. Таким образом, имеется m_i линейно независимых собственных векторов оператора f с собственным значением λ_i. Поскольку собственные векторы с различными собственными значениями линейно независимы, то имеется

$$n = \sum_{i=1}^{s} m_i$$

линейно независимых собственных векторов

$$e_1', e_2', ..., e_n' \qquad (11.23)$$

оператора f, которые и составляют базис пространства V.

Так как матрица B оператора f в базисе (11.23) диагональная и $B = T^{-1}AT$ (T - матрица перехода от базиса (11.21) к базису (11.23)), то матрица

Следствие *Если все характеристические числа действительной матрицы действительны и попарно различны, то матрица диагонализируема в действительном пространстве.*

Например, матрица

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

имеет характеристические числа $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -9$, кратность каждого из которых равна соответственно $m_1 = 2$, $m_2 = 1$. Ранг r_1 матрицы $A - \lambda_1 E$ равен единице, и $n - r_1 = 3 - 1 = 2 = m_1$. Ранг r_2 матрицы $A - \lambda_2 E$ равен двум, и $n - r_2 = 3 - 2 = 1 = m_2$. Таким образом, условие теоремы 11.12 выполнено, и матрица A приводится к диагональному виду, например

$$B=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу T, удовлетворяющую условию $T^{-1}AT = B$. Собственными векторами матрицы A с собственным значением $\lambda_1 = 9$ будут $x(s_1, -2s_1 - 2s_2, s_2)$, а с собственным значением $\lambda_2 = -9$ векторы $y(2t, t, 2t)$. Положив $s_1 = 0$, $s_2 = 1$ и $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, $t = 1$, получим собственные векторы $x_1(0, -2, 1)$, $x_2(1, -2, 0)$, $x_3(2, 1, 2)$, составляющие базис. Следовательно,

$$T=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- и есть матрица, удовлетворяющая условию $T^{-1}AT = B$.

Задача 4.18. В некотором базисе линейный оператор, действующий в трехмерном линейном пространстве, имеет матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно ли матрицу линейного оператора привести к диагональному виду путем перехода к новому базису?

◀ Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -5 & -3 \\ 3 & -2-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0.$$

Корни этого уравнения $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = 2$ являются собственными значениями линейного оператора $\mathcal{A}$. Для определения размерностей собственных подпространств линейного оператора, отвечающих этим двум значениям, вычислим ранги соответствующих матриц:

$$\text{Rg }(\mathbf{A} - \lambda_{1,2}\mathbf{E}) = \text{Rg} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = 2;$$

$$\text{Rg }(\mathbf{A} - \lambda_3\mathbf{E}) = \text{Rg} \begin{pmatrix} 4 & -5 & -3 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 2.$$

Размерности первого и второго собственных линейных подпространств решений одинаковы: $n - r = 1$. Поэтому суммарная размерность двух подпространств, равная двум, меньше размерности исходного пространства. Это означает, что не существует собственного базиса данного линейного оператора, в котором матрица была бы диагональной, т. е. нельзя матрицу **A** привести к диагональному виду. ▶

) Действия над линейными операторами

Сумма линейных операторов

Суммой операторов f и g некоторого пространства называется оператор h такой, что для любого вектора x этого пространства выполняется

$$h(x) = f(x) + g(x). \qquad (11.24)$$

Сумму операторов f и g будем обозначать $f + g$. Очевидно, $f + g = g + f$.

Докажем, что *сумма линейных операторов является линейным оператором*. Пусть f и g - линейные операторы некоторого пространства, т.е. для любых двух векторов x_1, x_2 этого пространства верно

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2), \quad g(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha g(x_1) + \beta g(x_2),$$

где α и β - любые числа. Для оператора $f + g$ имеем

$$(f + g)(\alpha x_1 + \beta x_2) = h(\alpha x_1 + \beta x_2)$$
$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) + g(\alpha x_1 + \beta x_2) =$$
$$= \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) + \alpha g(x_1) + \beta g(x_2) =$$
$$= \alpha(f(x_1) + g(x_2)) + \beta(f(x_1) + g(x_2)) = \alpha h(x_1) + \beta h(x_2),$$

или

$$h(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha h(x_1) + \beta h(x_2).$$

Последнее равенство означает, что $h = f + g$ - линейный оператор.

Теорема 11.13 *Если линейные операторы f и g в некотором базисе имеют соответственно матрицы A и B, то оператор $f+g$ в том же базисе имеет матрицу $A+B$.*

Доказательство.

$$y=f(x),\quad z=g(y),\quad y+z=(f+g)x=h(x),$$

тогда

$$Y=AX,\quad Z=BX,\quad Y+Z=CX,$$

где C - матрица преобразования h в данном базисе.

Из первых двух матричных уравнений следует, что $Y+Z=(A+B)X$. Сравнивая это уравнение с третьим уравнением, получаем $C=A+B$.

Произведение оператора на число

Произведением αf линейного оператора f некоторого пространства на число α называется оператор g, такой, что для любого x из этого простр[illegible]а

$$g(x)=\alpha\left(f(x)\right).$$

Произведение оператора f на число α является линейным оператором, а матрица этого оператора (в любом базисе) равна произведению матрицы оператора f на число α.

Произведение операторов

Рассмотрим линейный оператор f, переводящий вектор x в вектор y, т.е. $y=f(x)$. К вектору y применим оператор g, переводящий вектор y в вектор z, т.е. $z=g(y)$. Так как $y=f(x)$, то имеем оператор $z=g(f(x))$, переводящий вектор x в вектор z. Таким образом z получен в результате последовательного применения операторов f и g. Оператор, заключающийся в последовательном применении операторов f и g, называется ***произведением*** оператора f на оператор g, или ***композицией*** этих операторов, и обозначается $g\circ f$ (или просто $g\cdot f$); отметим, что справа записывается первый оператор. Таким образом,

$$g\circ f(x)=g(f(x)). \qquad (11.25)$$

Докажем, что *произведение линейных операторов является линейным оператором.*

Пусть f и g - линейные операторы некоторого линейного пространства. В соответствии с определением для любых векторов $x_1,\ x_2$ этого пространства

$$f(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha f(x_1)+\beta f(x_2),\quad g(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha g(x_1)+\beta g(x_2),$$

где α и β - любые числа. Принимая во внимание формулу (11.25), получаем

$$g\circ f(\alpha x_1+\beta x_2)=g(f(\alpha x_1+\beta x_2))=g(\alpha f(x_1))+g(\beta f(x_2))=$$
$$=\alpha g(f(x_1))+\beta g(f(x_2))=\alpha g\circ f(x_1)+\beta g\circ f(x_2),$$

а это означает, что $g\circ f$ - линейный оператор.

Теорема 11.14 *Если в некотором базисе линейные операторы* f *и* g *имеют соответственно матрицы* A *и* B, *то оператор произведения* $g \circ f$ *в том же базисе имеет матрицу* BA.

Доказательство. Пусть

$$y = f(x), \quad z = g(y), \quad z = g \circ f(x),$$

тогда

$$Y = AX, \quad Z = BY, \quad Z = CX,$$

где C - матрица оператора $g \circ f$ в рассматриваемом базисе; X, Y - матрицы-столбцы соответственно из координат векторов x, y.

Уравнения $Z = BY$, $Y = AX$ приводят к уравнению $Z = BAX$. Сравнивая это уравнение с уравнением $Z = CX$, заключаем, что $C = BA$.

Свойства операции умножения операторов (для любого числа α и любых линейный операторов f, g, h).

1. $\alpha(fg) = (\alpha f)g$.

2. $f(gh) = (fg)h$.

3. $(f + g)h = fh + gh$.

4. $f(g + h) = fg + fh$

5. Умножение операторов некоммутативно, т.е., вообще говоря, $fg \neq gf$.

Коммутатором линейных операторов f и g называется оператор $(f, g) = fg - gf$.

Например, даны два линейных оператора f и g с матрицами соответственно:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ 3 & 0 & 1\\ 5 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

в некотором базисе. Найдем матрицы C и D операторов соответственно $g\circ f$ и $f\circ g$ в том же базисе.

Решение. Согласно доказанной теореме

$$C=BA=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ 3 & 0 & 1\\ 5 & 2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -5 & 1\\ 3 & -1 & -4\\ 5 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$D=AB=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ 3 & 0 & 1\\ 5 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & -5 & 0\\ 18 & 6 & 7\\ 7 & 4 & 3\end{pmatrix}.$$

Линейный оператор называется ***невырожденным***, если его матрица невырожденная. В противном случае оператор называется ***вырожденным***.

Теорема 11.15 *Невырожденный линейный оператор является взаимно однозначным.* И, обратно, *всякий взаимно однозначный оператор является невырожденным.*

Доказательство. Пусть f - невырожденный линейный оператор. Докажем, что для каждого вектора $y^*\left(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*\right)$ существует единственный вектор x, такой, что $f(x) = y^*$, или

$$AX = Y^*, \tag{11.26}$$

где A - матрица данного оператора; X, Y^* - столбцы из координат векторов x и y^*.

Так как система (11.26) – невырожденная, то она имеет единственное решение: $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$. Следовательно, вектор y^* имеет единственный прообраз $x^*\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$.

Докажем обратное. Пусть f - взаимно однозначный линейный оператор, имеющий в некотором базисе матрицу A. Так как каждый вектор $y^*\left(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*\right)$ имеет единственный прообраз x, то система (11.26) определенная. Следовательно, $\det A \neq 0$, и оператор f невырожденный.

Теорема 11.16 *Для того, чтобы линейный оператор был невырожденным, необходимо и достаточно, чтобы он переводил ненулевой вектор в ненулевой.*

Доказательство. *Необходимость*. Пусть данный линейный оператор f невырожденный. Всякий линейный оператор переводит нулевой вектор в нулевой, а так как невырожденный оператор взаимно однозначен, то он переводит ненулевой вектор в ненулевой.

Достаточность. Пусть данный линейный оператор f с матрицей A переводит любой ненулевой вектор в ненулевой. Предположим, что оператор f вырожденный, т.е. $\det A \neq 0$. Система $AX = O$ имеет нетривиальное решение $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$. Следовательно, оператор f переводит ненулевой вектор $x^*\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ в нулевой, что противоречит условию.

Теорема 11.17 *Произведение двух невырожденных линейных операторов есть невырожденный оператор.*

Доказательство. Пусть даны линейные невырожденные операторы f и g соответственно с матрицами A и B в некотором базисе. Произведение $f \circ g$ данных операторов имеет в том же базисе матрицу AB. Так как произведение невырожденных матриц A и B есть невырожденная матрица, то оператор $f \circ g$ является невырожденным.

11.11 Оператор, обратный данному линейному оператору

Два линейных оператора f и φ называются ***взаимно обратными***, если для любого x имеют место равенства

$$f \circ \varphi(x) = \varphi \circ f(x) = x, \tag{11.27}$$

т.е. $f \circ \varphi$ и $\varphi \circ f$ - тождественные операторы.

Если справедливы равенства (11.27), то оператор f называется ***обратным оператору*** φ, а φ - ***обратным оператору*** f.

Если операторы f и φ имеют в некотором базисе матрицы соответственно A и B, то из равенств (11.27) следует, что $AB = BA = E$, т.е. A и B - взаимно обратные матрицы.

Из сказанного выше вытекают следующие утверждения.

1. *Для того чтобы линейный оператор имел обратный оператор, необходимо и достаточно, чтобы он был невырожденным.*

2. *Для данного линейного невырожденного оператора с матрицей A в некотором базисе существует единственный обратный оператор, причем матрица обратного оператора равна матрице A^{-1} в том же базисе.*

11.12 Ортогональные матрицы*

Рассмотрим евклидово n-мерное пространство E_n. Для любых двух векторов

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n, \qquad y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \ldots + y_n e_n$$

в ортонормированном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ скалярное произведение выражается формулой

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n. \tag{11.28}$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{11.29}$$

называется ***ортогональной***, если соответствующая ей система векторов

$$a_1(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}),\ a_2(a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}),\ \ldots,\ a_n(a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn}) \tag{11.30}$$

является ортонормированной.

В соответствии с формулой (11.28) получаем

$$(a_i, a_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj}. \tag{11.31}$$

Векторы (11.30) будут ортонормированными, если

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \begin{cases} 1 & при \quad i = j, \\ 0 & при \quad i \neq j \end{cases} \tag{11.32}$$

для любых i, j $(i = 1, 2, \ldots, n,\ \ j = 1, 2, \ldots, n)$.

Примеры ортогональных матриц:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ -0{,}6 & -0{,}8 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что единичная матрица любого порядка является ортогональной.

Теорема 11.18 *Необходимое и достаточное условие ортогональности матрицы A выражается равенством*

$$A^T A = E \,, \tag{11.33}$$

где A^T - матрица, полученная из матрицы A транспонированием; E - единичная матрица того же порядка, что и A.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть матрица A, определяемая формулой (11.29), ортогональна, т.е. выполнены условия (11.32). Для транспонированной матрицы $A^T = (a'_{ik})$ по определению $a'_{ik} = a_{ki}$. Найдем произведение $A^T A = C = (c_{ij})$.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a'_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \begin{cases} 1, \; i = j, \\ 0, \; i \neq j, \end{cases} \quad C = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^T A = E \,.$$

Достаточность. Пусть $A^T A = E$, тогда

$$\sum_{k=1}^{n} a'_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \begin{cases} 1, \; i = j, \\ 0, \; i \neq j. \end{cases}$$

Это означает, что A - ортогональная матрица.

Следствие 1 *Модуль определителя ортогональной матрицы равен* 1.

Действительно, из (11.33) получаем $\det\left(A^T A\right)=\det E$, $\det A^T \cdot \det A=\det E$, $\det A \cdot \det A=\det E$, $(\det A)^2=1$, $\det A=\pm 1$, $|\det A|=1$.

Следствие 2 *Ортогональная матрица является невырожденной матрицей.* Это следует из предыдущего утверждения.

Следствие 3 *Произведение двух ортогональных матриц есть ортогональная матрица.*

Пусть A и B - ортогональные матрицы одного порядка. Так как $(AB)^T=B^T A^T$, то $(AB)^T(AB)=B^T A^T AB=B^T\left(A^T A\right)B=B^T EB=B^T B=E$, т.е. $(AB)^T(AB)=E$. На основании (11.33) заключаем, что AB - ортогональная матрица.

Следствие 4 *Равенство* $A^T=A^{-1}$ *выражает необходимое и достаточное условие ортогональности матрицы* A.

В самом деле, если A - ортогональная матрица, то $A^T A=E$. С другой стороны, $A^{-1}A=E$. Из этих двух равенств следует, что $A^T=A^{-1}$.

Обратно, пусть $A^T=A^{-1}$, тогда отсюда и из равенства $A^{-1}A=E$ следует $A^T A=E$, т.е. A - ортогональная матрица.

Следствие 5 *Матрица, полученная транспонированием ортогональной матрицы – ортогональна.*

Если A - ортогональная матрица, то $\left(A^T\right)^T A^T=AA^T=AA^{-1}=E$, или $\left(A^T\right)^T A^T=E$. В силу (11.33) это означает, что A^T - ортогональная матрица.

Следствие 6 *Матрица, обратная ортогональной матрице, - ортогональна.*

Если A - ортогональная матрица, то $A^T=A^{-1}$, $A^{-1}A=E$. Далее, $\left(A^{-1}\right)^{-1}A^{-1}=AA^{-1}=E$, или $\left(A^{-1}\right)^{-1}A^{-1}=E$. В силу (11.33) и следствия 4 это означает, что A^{-1} - ортогональная матрица.

Замечание 1. Из условия $\det A=\pm 1$ не следует, что A - ортогональная матрица. Например, матрица $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, для которой $\det A=1$, не будет ортогональной, так как $A^T A \neq E$.

Замечание 2. Сумма ортогональных матриц не является ортогональной матрицей.

Замечание 3. Необходимое и достаточное условие ортогональности матрицы A можно выразить равенством $A^T A=E$.

Теорема 11.19 *Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису является ортогональной.*

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ - два ортонормированных базиса евклидова n-мерного пространства и $T = (t_{ij})$ - матрица перехода от первого базиса ко второму, т.е.

$$e_1' = t_{11} e_1 + t_{21} e_2 + \ldots + t_{n1} e_n,$$

$$e_2' = t_{12} e_1 + t_{22} e_2 + \ldots + t_{n2} e_n,$$

....

$$e_n' = t_{1n} e_1 + t_{2n} e_2 + \ldots + t_{nn} e_n.$$

Так как $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ - ортонормированный базис, т.е.

$$(e_i', e_j') = \begin{cases} 1, i = j, i = 1, 2, \ldots, n, \\ 0, i \neq j, i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

и $(e_i', e_j') = \sum_{k=1}^{n} t_{ki} t_{kj}$,

то $\sum_{k=1}^{n} t_{ki} t_{kj} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Это означает, что $T = (t_{ij})$ - ортогональная матрица.

Задача 5.4. Проверить, является ли матрица

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

матрицей ортогонального оператора.

◄ Найдем матрицу $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ и произведения $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получим, что $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{E}$, следовательно, $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Найдем определитель исходной матрицы $\mathbf{A}$:

$$\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix} 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{vmatrix}=-1.$$

Следовательно, данная матрица есть матрица некоторого ортогонального оператора. ►

Задача 5.5. Привести к диагональному виду матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ -10 & -11 \end{pmatrix}$$

линейного оператора $\mathcal{A}$.

◄ 1. Найдем собственные значения матрицы **A**, для чего составим ее характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -10 \\ -10 & -11-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 7\lambda - 144 = 0.$$

Корни этого уравнения $\lambda_1 = -16$, $\lambda_2 = 9$ являются собственными значениями линейного оператора $\mathcal{A}$.

2. Найдем собственные элементы. Составим систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & -10 \\ -10 & -11-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} (4-\lambda)x_1 & -10x_2 = 0, \\ -10x_1 + (-11-\lambda)x_2 = 0. \end{cases}$$

Для собственного значения $\lambda_1 = -16$ она имеет вид

$$\begin{cases} 20x_1 - 10x_2 = 0, \\ -10x_1 + 5x_2 = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что ранг матрицы этой системы $r = 1$, размерность линейного пространства решений системы $n - r = 1$, где $n = 2$ — число неизвестных в системе. Следовательно, фундаментальная система решений состоит из одного столбца, например, можно взять столбец $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (все множество собственных элементов, соответствующих собственному значению $\lambda_1 = -16$, имеет вид $\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, где $\alpha \neq 0$ — произвольная константа).

Для собственного значения $\lambda_2 = 9$ получим систему

$$\begin{cases} -5x_1 - 10x_2 = 0, \\ -10x_1 - 20x_2 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы этой системы $r = 1$, размерность линейного пространства решений системы $n - r = 1$. В качестве фундаментальной системы решений из всего множества собственных элементов $\beta\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta \neq 0$, можно взять столбец $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Итак, $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $f_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ являются собственными элементами матрицы **A**, отвечающими собственным значениям $\lambda_1 = -16$ и $\lambda_2 = 9$ соответственно.

3. Пронормировав эти элементы, получим

$$e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad e_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Найденные элементы e_1 и e_2 образуют ортонормированный базис из собственных элементов.

4. Составим из элементов e_1 и e_2 матрицу

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix},$$

которая является матрицей ортогонального преобразования, приводящего исходную матрицу **A** к диагональному виду

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

5. Убедимся в том, что матрица **P** определена правильно. Для этого подставим ее в тождество $\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{P} = \Lambda$, получим

$$\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -10 \\ -10 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \Lambda.$$

11.13 Ортогональные операторы

Линейный оператор f евклидова пространства Е называется ***ортогональным***, если для любых $x,\ y \in \mathrm{E}$ выполняется условие

$$(x,\ y) = (f(x),\ f(y)).$$

Теорема 11.20 *Для того чтобы оператор $f:\mathrm{E} \to \mathrm{E}$ был ортогональным, необходимо и достаточно, чтобы его матрица в ортонормированном базисе была ортогональна.*

Доказательство. Пусть A - матрица оператора $f:\mathrm{E} \to \mathrm{E}$ в ортонормированном базисе; X, Y - матрицы-ст[illegible]ординат соответственно векторов $x,\ y$ в этом базисе. Имеем:

$$(x,\ y) = X^T Y; \tag{11.34}$$

$$(f(x),\ f(y)) = (AX)^T AY$$

или

$$(f(x),\ f(y)) = X^T A^T AY. \tag{11.35}$$

Необходимость. Пусть оператор f ортогональный, т.е. $(x,\ y) = (f(x),\ f(y))$. Тогда из равенств (11.34) и (11.35) имеем $X^T Y = X^T A^T AY$.

Из последнего равенства следует, что $A^T A = E$, поэтому матрица A ортогональная.

Достаточность. Пусть матрица A ортогональная, т.е. $A^T A = E$. Тогда из равенств (11.34) и (11.35) имеем

$$(f(x),\ f(y)) = X^T A^T AY = X^T EY = X^T Y = (x,\ y),$$

и, следовательно, оператор f ортогональный.

Теорема 11.21 *Для того чтобы линейный оператор евклидова пространства был ортогональным, необходимо и достаточно, чтобы он ортонормированный базис переводил в ортонормированный.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть f - ортогональный оператор евклидова пространства, имеющий в некотором ортонормированном базисе $e_1, e_2, ..., e_n$ матрицу A. Тогда координаты вектора $e_i' = f(e_i)$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$ расположены в i -м столбце матрицы A. Так как матрица A ортогональная, то

$$\left(e_i', e_j'\right) = \begin{cases} 1, \text{ если } & i = j, \\ 0, \text{ если } & i \neq j. \end{cases}$$

Следовательно, векторы $e_1', e_2', ..., e_n'$ образуют ортонормированный базис.

Достаточность. Пусть преобразование f переводит ортонормированный базис $e_1, e_2, ..., e_n$ в базис $e_1', e_2', ..., e_n'$. Тогда матрица A преобразования f в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$ является матрицей перехода от базиса $e_1, e_2, ..., e_n$ к базису $e_1', e_2', ..., e_n'$. Следовательно, матрица A ортогональная, и преобразование f является ортогональным.

Замечание: из доказательства теоремы следует, что если линейный оператор переводит некоторый ортонормированный базис в ортонормированный, то этот оператор всякий ортонормированный базис переводит в ортонормированный. При этом оператор является ортогональным.

Теорема 11.19 *Для того чтобы линейный оператор был ортогональным, необходимо и достаточно, чтобы он не менял длину вектора.*

Доказательство. *Необходимость* следует из определений линейного ортогонального оператора и длины вектора.

Достаточность. Пусть линейный оператор f не меняет длину вектора. Найдем $|x+y|^2$ и $|f(x+y)|^2$:

$$|x+y|^2=(x+y,\,x+y)=|x|^2+2(x,\,y)+|y|^2;$$

$$|f(x+y)|^2=(f(x+y),\,f(x+y))=(f(x)+f(y),\,f(x)+f(y))=$$

$$=|f(x)|^2+|f(y)|^2+2(f(x),\,f(y)).$$

Из этих равенств, учитывая, что оператор f не меняет длину вектора, имеем $(x,\,y)=(f(x),\,f(y))$.

Для ортогонального оператора справедливы следующие утверждения.

1. *Ортогональный оператор – невырожденный.*

2. *Для ортогонального оператора существует обратный оператор, который также является ортогональным.*

3. *Если A - матрица ортогонального оператора, то A^T - матрица оператора, обратного данному.*

4. *Произведение ортогональных операторов также является ортогональным оператором.*

Спасибо за внимание!