Экзаменационный билет №5

1. (6 баллов) Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. (6 баллов) Найти фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1 - 11x_2 + 6x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$.

3. (7 баллов) Найти образ, ядро, ранг и дефект линейного оператора $\hat{A}: L \to L$, где $L = \{p(t) = at^3 + bt^2 + ct: a, b, c \in R\}$, $\hat{A}p(t) = t \cdot p''(t)$.

4. (8 баллов) Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\hat{A}: L \to L$, где $L = \left\{X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in R\right\}$, $\hat{A}X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X$.

5. (7 баллов) Исследовать квадратичную форму
$\Phi(\bar{x}) = -x_1^2 - 4x_1x_2 - 9x_2^2 + 6x_2x_3 + 4x_3^2$ на знакоопределенность.

6. (8 баллов) В двумерном евклидовом пространстве матрица Грама и векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ в базисе $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ соответственно равны
$G = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \bar{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Найти длины векторов $\bar{x}$, $\bar{y}$ и угол между ними.

7. (8 баллов) Ортогональным преобразованием переменных приведите квадратичную форму $\Phi(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$ к каноническому виду.