Линейная алгебра и аналитическая геометрия
Лекция 6
Тема:Линейные операторы

Литература:

1. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах. – СПб: Издательство «Лань», 2008, 256с.
2. Кремер Н.Ш. и др. Высшая математика для экономистов: Практикум.– М.: Юнити-Дана, 2007, 479с.
3. Ефимов А.В., Поспелов А.С. и др. Сборник задач по математике. Ч. 1. – М.: Физматлит, 2001.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1 – М.: Оникс, 2006.

Определение отображения

Известно, что в курсе математического анализа одним из основных понятий является понятие функции. Функциональная зависимость здесь предполагает наличие двух числовых множеств и правила, по которому каждому числу одного множества ставится в соответствие единственное число второго множества. Такое правило представляет собой однозначную функцию действительного переменного.

Однако помимо числовых множеств, элементами которых являются числа, в общем случае рассматривают функциональную зависимость между множествами, элементами которых могут быть векторы, матрицы и т. п. Такие элементы составляют *нечисловые* множества.

Пусть X и Y — некоторые множества произвольных элементов. Каждому элементу из множества X можно поставить в соответствие по определенному правилу один или несколько элементов множества Y.

Определение 4.1. Правило f, по которому каждому элементу x некоторого непустого множества X ставится в соответствие единственный элемент y непустого множества Y, называют ***отображением*** (или ***оператором***) множества X в множество Y.

Результат y применения оператора f к элементу x обозначают

$$y = f(x)$$

и говорят, что оператор f *действует* из X в Y или *отображает* X в Y, записывая это в виде $f: X \to Y$. Элемент y называют ***образом*** элемента x при действии оператора f, а элемент x — ***прообразом*** элемента y.

Линейный оператор. Основные определения

Пусть даны два линейных действительных (комплексных) пространства V и W, размерности которых равны соответственно m и n. Будем говорить, что задано отображение f пространства V в W или оператор, действующий из V в W, если каждому $x \in V$ поставлен в соответствие единственный $y \in W$.

Вектор y назовем ***образом вектора*** x, а x - ***прообразом вектора*** y. Будем говорить, что оператор f переводит вектор x в вектор y, и писать $y = f(x)$.

Из определения оператора следует, что каждый вектор имеет единственный образ, но не каждый вектор имеет прообраз, а если имеет, то этот прообраз, вообще говоря, может быть и не единственным.

Оператор называется ***взаимно однозначным*** (***биективным***), если каждый вектор имеет прообраз, и притом единственный.

Два оператора $f: V \to W$ и $g: V \to W$ называются ***равными***, если $f(x) = g(x)$, для любого $x \in V$.

Оператор называется ***линейным***, если для любых векторов пространства и произвольного числа λ (действительного, если пространство действительное, и комплексного, если – комплексное), выполняются следующие условия:

1) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$;

2) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Из определения следует, что для линейного оператора справедливо соотношение

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2), \tag{11.1}$$

где α, β - любые числа (действительные или комплексные).

Справедливо и обратное: если имеет место равенство (11.1), то оператор f является линейным.

Отметим, что линейный оператор переводит нулевой вектор в нулевой, так как согласно условию **2)**: $f(0) = f(0x) = 0f(x) = \theta$, где θ - нулевой вектор.

Простейшим примером линейного оператора является тождественное преобразование $f(x)=x$, т.е. преобразование, которое каждому вектору линейного пространства ставит в соответствие тот же вектор.

Пусть линейный оператор f n-мерного пространства переводит базисные векторы $e_1, e_2, ..., e_n$ соответственно в векторы $e'_1, e'_2, ..., e'_n$, т.е.

$$e'_1 = f(e_1), \qquad e'_2 = f(e_2), \ldots, \qquad e'_n = f(e_n).$$

Образ любого вектора x данного линейного пространства можно выразить через образы базисных векторов $e_1, e_2, ..., e_n$, то есть через $e'_1, e'_2, ..., e'_n$.

Действительно, если

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n,$$

то

$$f(x) = f(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2) + \ldots + \alpha_n f(e_n) =$$
$$= \alpha_1 e'_1 + \alpha_2 e'_2 + \ldots + \alpha_n e'_n,$$

т.е.

$$f(x) = \alpha_1 e'_1 + \alpha_2 e'_2 + \ldots + \alpha_n e'_n.$$

Следовательно, *линейный оператор будет вполне определен, если заданы образы базисных векторов рассматриваемого пространства.*

Пусть f - линейный оператор n-мерного линейного пространства, переводящий базисные векторы $e_1, e_2, ..., e_n$ в векторы $e'_1, e'_2, ..., e'_n$. Каждый из последних векторов разложим по базису $e_1, e_2, ..., e_n$:

$$e'_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n,$$
$$e'_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$e'_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n.$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

в которой k-й столбец состоит из координат вектора e'_k $(k = 1, 2, ..., n)$, называется ***матрицей линейного оператора*** f в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$. Итак, *каждому линейному оператору n-мерного линейного пространства соответствует матрица порядка n в данном базисе; обратно, каждой матрице порядка n соответствует линейный оператор n-мерного пространства.*

Например, в пространстве M_2 рассмотрим оператор вращения на угол φ и найдем матрицу этого оператора в базисе $i,\ j$.

Решение.

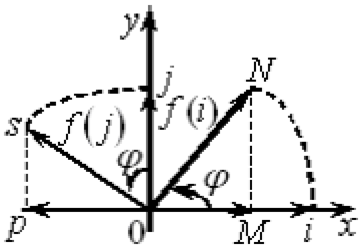

Рисунок 104

Из рисунка 104 очевидно следующее:

$f(i) = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN} = i\cos\varphi + j\sin\varphi$;

$f(j) = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PS} = -i\sin\varphi + j\cos\varphi$.

Следовательно, искомая матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Например, рассмотрим оператор f, переводящий всякий вектор $r \in M_2$ в симметричный ему вектор относительно оси Ox (оператор симметрии относительно оси Ox). Докажем, что этот оператор является линейным. Найдем его матрицу в базисе $i,\ j$.

Из рисунка 105 видим, что $f(i)=i$, $f(j)=-j$. Следовательно, искомая матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

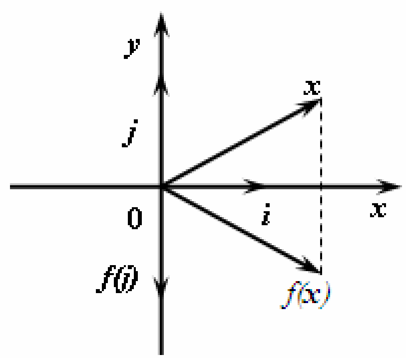

Рисунок 105

Отметим, что матрица тождественного преобразования в любом базисе будет единичной; обратно, любой единичной матрице n-го порядка соответствует тождественное преобразование линейного n-мерного пространства.

3. *Оператор дифференцирования* $\frac{d}{dx}$, действующий в линейном пространстве K_n многочленов одной переменной x степени, не превосходящей натурального числа n. Каждому многочлену $P(x)$ ставится в соответствие его производная $P'(x)$, являющаяся многочленом степени не выше $n-1$, т. е. $P'(x)$ — элемент того же пространства K_n: $\frac{d}{dx}P(x) = P'(x)$ (производная суммы функций равна сумме производных, при умножении функции на число производная этой функции умножается на это число).

Связь между координатами вектора и его образа

Рассмотрим линейный оператор f n-мерного линейного пространства заданный в некотором базисе $e_1, e_2, ..., e_n$ матрицей

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (11.2)$$

Координаты вектора x и его образа $y=f(x)$ известны:

$$\begin{aligned} &x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n, \\ &y = f(x) = y_1e_1 + y_2e_2 + \dots + y_ne_n. \end{aligned} \qquad (11.3)$$

Найдем зависимость между координатами векторов x и y.

Принимая во внимание определение линейного оператора, получаем

$$\begin{aligned} &f(x) = f(x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + \dots + x_nf(e_n) = \\ &= x_1(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n) + x_2(a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n) + \dots \\ &\dots + x_n(a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &f(x) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)e_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n)e_2 + \dots \\ &\dots + (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n)e_n. \end{aligned}$$

Поскольку каждый вектор разлагается по базису единственным образом, то из этого равенства и второго равенства (11.3) следуют искомые формулы:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n. \end{cases} \qquad (11.4)$$

Формулы (11.4) можно записать в матричном виде

$$Y = AX, \qquad (11.5)$$

где A определяется формулой (11.2), а X и Y - формулами

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Если переменные $y_1, y_2, ..., y_n$ связаны с переменными $x_1, x_2, ..., x_n$ формулами (11.4), будем говорить, что задан линейный однородный оператор с матрицей A, переводящий переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ в переменные $y_1, y_2, ..., y_n$. Он обладает теми же свойствами, что и линейный оператор n-мерного линейного пространства.

Линейный однородный оператор переменных (11.4) или (11.5) называется ***невырожденным***, если $\det A \neq 0$.

Например, пусть линейный оператор f двумерного пространства в базисе e_1, e_2 задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти $f(x)$, если $x = 4e_1 - 3e_2$.

Решение. По формуле (11.5) имеем

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -19 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $f(x) = 6e_1 - 19e_2$.

Замечание. При рассмотрении линейных операторов (линейных преобразований) пользуются и другими обозначениями. Если $y = f(x)$, где f - линейный оператор с матрицей A в некотором базисе, то возможна запись $y = Ax$. Условия **1)** и **2)**, определяющие линейный оператор в этом случае записывают в виде

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2, \qquad A(\lambda x) = \lambda Ax.$$

Что такое линейное преобразование?

Если в линейном пространстве V каждому вектору $\mathbf{v}$ по некоторому правилу A поставлен в соответствие вектор $\mathbf{u}$ этого же пространства, то говорят, что в данном пространстве задана векторная функция векторного аргумента: $\mathbf{u} = \mathrm{A}(\mathbf{v})$ *(во избежание разночтений с другими математическими записями скобки нередко опускают:* $\mathbf{u} = \mathrm{A}\mathbf{v}$ *).*

Данная функция называется **линейным преобразованием**, если для неё выполнены *свойства линейности*, с которыми вы ещё не раз столкнётесь в ходе изучения высшей математики:

$\mathrm{A}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathrm{A}(\mathbf{v}) + \mathrm{A}(\mathbf{w})$,

$\mathrm{A}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda\mathrm{A}(\mathbf{v})$, где $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ – произвольные векторы данного пространства, а λ – действительное число.

Линейное преобразование также называют **линейным оператором**.

Следующий пример : рассмотрим линейное пространство векторов-строк вида $\overline{v}(v_1; v_2)$ $v_1, v_2 \in \mathbf{R}$, в котором определены операция сложения $\overline{v} + \overline{w} = (v_1; v_2) + (w_1; w_2) = (v_1 + w_1; v_2 + w_2)$ и умножения вектора на число $\lambda\overline{v} = \lambda(v_1; v_2) = (\lambda v_1; \lambda v_2)$.

Никакой геометрии!!! это называется

n *-мерным арифметическим векторным пространством*, и сейчас мы имеем дело с частным арифметическим пространством размерности 2.

Докажем, что функция векторного аргумента $\mathrm{A}(\overline{v}) = 2\overline{v}$ является линейным преобразованием. Доказательство состоит в проверке свойств линейности:

$\mathrm{A}(\overline{v} + \overline{w}) = 2(\overline{v} + \overline{w}) = 2\overline{v} + 2\overline{w} = \mathrm{A}(\overline{v}) + \mathrm{A}(\overline{w})$

Здесь мы воспользовались *дистрибутивностью умножения на скаляр относительно сложения векторов* (одна из **аксиом векторного пространства**)

$\mathrm{A}(\lambda\overline{v}) = 2(\lambda\overline{v}) = (2\lambda)\overline{v} = (\lambda \cdot 2)\overline{v} = \lambda \cdot (2\overline{v}) = \lambda\mathrm{A}(\overline{v})$

А здесь – аксиомой *ассоциативности умножения на скаляр*, *коммутативностью (перестановочностью)* самих действительных чисел *(аксиома **поля**)* и снова той же аксиомой ассоциативности.

Таким образом, $\mathrm{A}(\overline{v}) = 2\overline{v}$ – это линейное преобразование.

Разумеется, далеко не всякий оператор является линейным, и в других источниках информации можно найти массу примеров, как на удачную, так и неудачную проверку различных преобразований $\mathrm{A}(\mathbf{v})$ на линейность. И со строгостью доказательств на практике обычно всё попроще, …хотя, тут от преподавателя зависит – и по-хорошему, в математике ещё нужно обосновать, почему «ноль не равен единице».

Ну а сейчас мы спускаемся на землю грешную и переходим к геометрическому смыслу линейных преобразований. Пусть $\overline{v}(v_1; v_2)$ – это множество геометрических векторов плоскости. Для простоты рассмотрим привычный **ортонормированный базис** и прямоугольную систему координат $(O; \overline{i}; \overline{j})$.
Если задан какой-либо базис, то линейное преобразование удобнее представить в матричном виде. Как записать оператор в виде **матрицы**?

На этот счёт существует **общее правило**: чтобы записать матрицу линейного преобразования в n-мерном базисе $(\overline{e}_1; \overline{e}_2; ...; \overline{e}_n)$ нужно последовательно и строго по порядку применять данный оператор к базисным векторам, а результаты заносить в столбцы матрицы *(слева направо)*.

Наш случай элементарен: сначала применим линейное преобразование $\mathrm{A}(\overline{v}) = 2\overline{v}$ к первому базисному вектору: $\mathrm{A}(\overline{i}) = 2(1; 0) = (2; 0)$ и запишем результат в 1-й столбец: $A = \begin{pmatrix} 2 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$. Затем «обрабатываем» 2-й ***орт***: $\mathrm{A}(\overline{j}) = 2(0; 1) = (0; 2)$ и заносим полученные координаты во 2-й столбец:
$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ – матрица линейного преобразования $\mathrm{A}(\overline{v}) = 2\overline{v}$ в базисе $(\overline{i}; \overline{j})$.

Протестируем построенную матрицу с помощью вектора $\overline{a} = (-1; 3)$. Для этого «уложим» его координаты в вектор-столбец и выполним следующее **матричное умножение**:
$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ – в результате «на выходе» получены координаты вектора $2\overline{a} = (-2; 6)$, что и требовалось проверить.

Поскольку любая точка плоскости $M(x_0; y_0)$ однозначно определяется её *радиус-вектором* $\overline{OM}(x_0; y_0)$ *(O – начало координат)*, то матрица преобразования, по существу, применима и к координатам точек. И далее для простоты я буду говорить, что, например, точка $M(1; -5)$:
$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-5) \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \end{pmatrix}$ – перешла в точку $M'(2; -10)$.

Наверное, все уже поняли, что делает этот оператор. Мысленно представьте произвольный треугольник на плоскости. После применения рассматриваемого линейного преобразования данный треугольник увеличится в два раза. Такие треугольники *(имеющие равные соответствующие углы)*, как многие помнят из школы, называются *подобными*. Да и сам оператор носит такое же название:

Линейное преобразование $\mathrm{A}(\bar{v}) = k\bar{v} \quad (k \in \mathbf{R})$ называется *преобразованием подобия* или *гомотетией*, причём:

– если $k > 1$, то речь идёт об однородном растяжении *(увеличении)* объектов плоскости в k раз;

– если $0 < k < 1$ – то о сжатии *(уменьшении)* в k раз;

– если $k = 1$, то преобразование *тождественно* (ничего не меняет).

И если k **по модулю** меньше нуля, то дополнительно к растяжению/сжатию/неизменности векторы меняют направление, а точки отображаются симметрично относительно начала координат.

При $k = 0$ имеет место так называемое *нулевое преобразование*.

Рассмотрим ещё несколько популярных примеров по теме, и, чтобы разнообразить серые геометрические будни, мысленно нарисуем на координатной плоскости кошачью морду. Можно и не мысленно

…Представили? Нарисовали? Отлично!

Преобразование $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ растягивает объекты плоскости по направлению вектора $\bar{i}$ *(горизонтали)* в 2 раза, после чего кот Леопольд радует нас своей широкой-широкой улыбкой!

И в самом деле, преобразуем точку $M(1; -5)$:

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-5) \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ – «иксовая» координата увеличилась в 2 раза, а «игрековая» – не изменилась.

Преобразование $\begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ сожмёт кота по горизонтали в 3 раза. Желающие могут по ходу объяснений тестировать для рассматриваемых матриц различные векторы и точки.

Преобразование $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}$ вытянет все ненулевые объекты плоскости по направлению вектора $\bar{j}$ *(по вертикали)* в полтора раза. Это будет очень удивлённый кот….

Дополнительные знаки «минус» приведут к зеркальному отображению объектов *(относительно оси ординат либо начала координат)*.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – образно говоря, «челюсть налево, лоб направо». Это преобразование называется *перекосом* или *сдвигом* плоскости в направлении вектора $\bar{i}$ *(в данном случае)*.

$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ – данное преобразование поворачивает векторы системы $(O; \bar{i}; \bar{j})$ против часовой стрелки на угол α.

И, наконец, венчает все эти метаморфозы ещё пример:

преобразование $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ переводит единичный квадрат с вершинами $O(0;\ 0), A(1;\ 0), B(1;\ 1), C(0;\ 1)$ в параллелограмм с вершинами $O'(0;\ 0), A'(a;\ b), B'(a+c; b+d), C'(c;\ d)$.

Из вышесказанного нетрудно понять, что в базисе $(\bar{i}; \bar{j})$ любой **квадратной матрице** «два на два» соответствует некоторое линейное преобразование, и наоборот любому линейному преобразованию соответствует своя матрица «два на два». И данный факт справедлив вообще для любого **аффинного базиса** $(\bar{e}_1; \bar{e}_2)$, причём **одно и то же линейное преобразование** в разных базисах будет иметь *в общем случае* разные матрицы *(что следует из самого принципа формирования этих матриц)*.

По аналогичной схеме можно рассмотреть векторы $\bar{v}(v_1;\ v_2;\ v_3)$ нашего трёхмерного пространства, с тем отличием, что преобразований будет больше, преобразования будут веселее. И, разумеется, линейные преобразования «работают» в векторных пространствах бОльшей размерности, однако там они уже далеки от геометрии.

Пример

В некотором аффинном базисе задано линейное преобразование $A=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. Найти *образ* точки $M(-3;\,2)$. Используя обратное преобразование, выполнить проверку.

Решение: *образ* – это то, что должно получиться в результате преобразования. В данном случае, очевидно, должна получиться некоторая точка $M'(x_0';\,y_0')$. Исходная точка $M(x_0;\,y_0)$, соответственно, является *прообразом*.

Образы векторов и точек мы уже неоднократно находили выше:

$$\begin{pmatrix}x_0'\\ y_0'\end{pmatrix}=A\cdot\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot(-3)-3\cdot 2\\ 1\cdot(-3)+2\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ 1\end{pmatrix}$$

Таким образом, линейное преобразование перевело точку $M(-3;\,2)$ в точку $M'(-3;\,1)$.

Теперь найдём матрицу обратного преобразования, которое превращает *образы* векторов и точек обратно в их *прообразы*. Для этого запишем простейшее **матричное уравнение** $X'=A\cdot X$ *(где* X *– координатный столбец прообразов, а* X' *– образов)* и для его разрешения относительно X умножим обе части на **обратную матрицу** A^{-1} слева:

$$A^{-1}X'=A^{-1}A\cdot X$$

$$A^{-1}X'=E\cdot X$$

$$A^{-1}X'=X$$

$$X=A^{-1}X'$$

Обратную матрицу можно найти через **алгебраические дополнения** либо **методом Гаусса-Жордана**, но здесь я рекомендую первый способ, поскольку он позволит быстро выяснить, а существует ли матрица A^{-1} вообще.

Сначала вычислим **определитель**:

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-1\cdot 2-1\cdot(-3)=-2+3=1\neq 0$$

, матрица линейного преобразования обратима обратное линейное преобразование существует и задаётся оно в точности матрицей A^{-1}.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

и выясняем, во что превратится найденная точка $M'(-3;\,1)$:

$$\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}x_0'\\ y_0'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot(-3)+3\cdot 1\\ -1\cdot(-3)-1\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ 2\end{pmatrix}$$

– получены координаты исходной точки $M(-3;\,2)$, что и требовалось проверить.

Ответ: $M'(-3;\,1)$

Следует отметить, что обратное преобразование осуществимо далеко не всегда. Так бывает, например, при проектировании векторов на координатные оси или при тривиальном нулевом преобразовании. В таких случаях определитель матрицы прямого оператора равен нулю $|A| = 0$ и обратной матрицы A^{-1} не существует.

Творческая задача для самостоятельного решения:

Пример

В результате применения оператора

$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ в некотором базисе получены *образы* $\overline{v}'(1;\,2),\ \overline{w}'(0;\,-1)$. Найти *прообразы* данных векторов.

Пример

В результате применения оператора

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

в некотором базисе получены *образы* $\overline{v}'(1;\,2),\ \overline{w}'(0;\,-1)$. Найти *прообразы* данных векторов.

Решение: *найдём матрицу обратного преобразования:*

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Найдём прообразы:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \cdot 1 - 4 \cdot 2 \\ -5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} w_1' \\ w_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \cdot 0 - 4 \cdot (-1) \\ -5 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\overline{v}(-1;\,1),\quad \overline{w}(4;\,-3)$

Пример
Даны два линейных преобразования:

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 \\ x_2' = x_1 - x_2 - x_3 \\ x_3' = 7x_1 + 4x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1'' = 3x_1' + x_2' \\ x_2'' = 2x_1' - 4x_2' - 5x_3' \\ x_3'' = 2x_2' + x_3' \end{cases}$$

Средствами матричного исчисления найти преобразование, выражающее x_1'', x_2'', x_3'' через x_1, x_2, x_3.

Решение: и как раз первое, что здесь можно сказать – это отсутствие информации о характере векторов $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Известно только, что они заданы в некотором базисе, ибо матрица линейного преобразования НЕ МОЖЕТ существовать без базиса *(т.к. она порождается базисными векторами)*. Сам базис нам тоже не известен, но для решения задачи информация о нём и не нужна.

Тем не менее, для пущего понимания предположим, что все дела происходят в обычной декартовой системе координат $(O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ я рассмотрю 3D-модель кота Леопольда
Запишем матрицу левого преобразования:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$. Данное преобразование переводит векторы

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ в *образы* $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$. Систему, кстати, удобнее переписать в виде уже знакомого **матричного уравнения**:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$ или, если короче: $X' = AX$.

Данный оператор определённым образом преобразует все векторы *(а значит и точки)* пространства. Геометрически это означает, что кот Леопольд, оказывается, например, сплющенным.

Теперь ВНИМАТЕЛЬНО записываем матрицу второго преобразования: $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 2 & -4 & -5\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ Данное преобразование переводит векторы $X'=\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\\ x_3'\end{pmatrix}$ в *образы* $X''=\begin{pmatrix}x_1''\\ x_2''\\ x_3''\end{pmatrix}$, в результате чего «сплющенный кот», скажем, растягивается вдоль какой-нибудь плоскости.

Аналогично – запишем преобразование в матричном виде:

$$\begin{pmatrix}x_1''\\ x_2''\\ x_3''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 2 & -4 & -5\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\\ x_3'\end{pmatrix}$$ или: $X''=BX'$

По условию, нужно найти результирующее *(композиционное)* преобразование, которое нам сразу даст «сплющенного и растянутого Леопольда». Подставим $X'=AX$ в уравнение $X''=BX'$:

$X''=BAX$

Всё оказалось просто – главное, матрицы перемножить в правильном порядке. Вычислим матрицу композиционного преобразования:

$$BA=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 2 & -4 & -5\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 5 & -3\\ 1 & -1 & -1\\ 7 & 4 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot 4+1\cdot 1+0\cdot 7 & 3\cdot 5+1\cdot(-1)+0\cdot 4 & 3\cdot(-3)+1\cdot(-1)+0\cdot 0\\ 2\cdot 4-4\cdot 1-5\cdot 7 & 2\cdot 5-4\cdot(-1)-5\cdot 4 & 2\cdot(-3)-4\cdot(-1)-5\cdot 0\\ 0\cdot 4+2\cdot 1+1\cdot 7 & 0\cdot 5+2\cdot(-1)+1\cdot 4 & 0\cdot(-3)+2\cdot(-1)+1\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 14 & -10\\ -31 & -6 & -2\\ 9 & 2 & -2\end{pmatrix}.$$

В результате:

$X''=(BA)X$

$$\begin{pmatrix}x_1''\\ x_2''\\ x_3''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 14 & -10\\ -31 & -6 & -2\\ 9 & 2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

Осуществим матричное умножение в правой части:

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13x_1 + 14x_2 - 10x_3 \\ -31x_1 - 6x_2 - 2x_3 \\ 9x_1 + 2x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$$

Две матрицы равны, если равны их соответствующие элементы. Таким образом, итоговое преобразование, выражающее координаты векторов-образов x_1'', x_2'', x_3'' через координаты векторов-прообразов x_1, x_2, x_3, запишется в виде следующей системы:

$$\begin{cases} x_1'' = 13x_1 + 14x_2 - 10x_3 \\ x_2'' = -31x_1 - 6x_2 - 2x_3 \\ x_3'' = 9x_1 + 2x_2 - 2x_3 \end{cases}$$

Выполним проверку. Для этого подставим уравнения $x_1' = 4x_1 + 5x_2 - 3x_3$, $x_2' = x_1 - x_2 - x_3$, $x_3' = 7x_1 + 4x_2$ левой системы *(см. условие)* в правую часть каждого уравнения 2-й системы:

1) $x_1'' = 3x_1' + x_2' = 3(4x_1 + 5x_2 - 3x_3) + x_1 - x_2 - x_3 = 12x_1 + 15x_2 - 9x_3 + x_1 - x_2 - x_3 = 13x_1 + 14x_2 - 10x_3$

2) $x_2'' = 2x_1' - 4x_2' - 5x_3' = 2(4x_1 + 5x_2 - 3x_3) - 4(x_1 - x_2 - x_3) - 5(7x_1 + 4x_2) =$

$= 8x_1 + 10x_2 - 6x_3 - 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 35x_1 - 20x_2 = -31x_1 - 6x_2 - 2x_3$

3) $x_3'' = 2x_2' + x_3' = 2(x_1 - x_2 - x_3) + 7x_1 + 4x_2 = 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 7x_1 + 4x_2 = 9x_1 + 2x_2 - 2x_3$

Что и требовалось проверить.

Этот способ, кстати, можно было бы рискнуть взять и за основой, если бы итоговое преобразование не требовалось найти средствами матричного исчисления

Ответ: $\begin{cases} x_1'' = 13x_1 + 14x_2 - 10x_3 \\ x_2'' = -31x_1 - 6x_2 - 2x_3 \\ x_3'' = 9x_1 + 2x_2 - 2x_3 \end{cases}$

Как пользоваться этой системой? Очень просто – берём например, вектор

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

и подставляем его координаты:

$$\begin{cases} x_1'' = 13 \cdot 0 + 14 \cdot 1 - 10 \cdot 2 = -6 \\ x_2'' = -31 \cdot 0 - 6 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -10 \\ x_3'' = 9 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -2 \end{cases}$$

– таким образом, он превратился в вектор

$$X'' = \begin{pmatrix} -6 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Более академичный способ – использование матричного уравнения $X'' = (BA)X$.

В том случае, если нужно вернуться к первоначальному виду, следует найти обратную матрицу результирующего преобразования $(BA)^{-1}$ и воспользоваться уравнением $X = (BA)^{-1} \cdot X''$.

Пример для самостоятельного решения

Даны два линейных преобразования в некотором базисе:

$$A:\begin{cases} y_1 = 9x_1 - 6x_2 \\ y_2 = 6x_1 - 4x_2 \end{cases} \qquad B:\begin{cases} z_1 = 2y_1 - 3y_2 \\ z_2 = 4y_1 - 6y_2 \end{cases}$$

Найти *образ* вектора $\overline{v}(-1;-1)$ двумя способами:

1) путём последовательного применения преобразований A и B;

2) с помощью композиционного оператора, выражающего координаты z_1, z_2 через x_1, x_2.

Однако на практике нужно иметь в виду следующее:

– системы запросто могут быть переставлены местами;

– условие задачи может требовать выразить x_1, x_2 через z_1, z_2 и тогда потребуется дополнительно находить обратную матрицу результирующего преобразования;

Пример для самостоятельного решения

Даны два линейных преобразования в некотором базисе:

$$A:\begin{cases} y_1 = 9x_1 - 6x_2 \\ y_2 = 6x_1 - 4x_2 \end{cases} \qquad B:\begin{cases} z_1 = 2y_1 - 3y_2 \\ z_2 = 4y_1 - 6y_2 \end{cases}$$

Найти *образ* вектора $\overline{v}(-1;-1)$ двумя способами:

1) путём последовательного применения преобразований A и B;

2) с помощью композиционного оператора, выражающего координаты z_1, z_2 через x_1, x_2.

Однако на практике нужно иметь в виду следующее:

– системы запросто могут быть переставлены местами;

– условие задачи может требовать выразить x_1, x_2 через z_1, z_2 и тогда потребуется дополнительно находить обратную матрицу результирующего преобразования;

Решение: *запишем матрицы преобразований:*

$$A=\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

1) Последовательно применим к вектору $\overline{v}(-1;-1)$ *преобразования* A *и* B*:*

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\cdot(-1)-6\cdot(-1) \\ 6\cdot(-1)-4\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_1'' \\ v_2'' \end{pmatrix} = B\cdot\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-3)-3\cdot(-2) \\ 4\cdot(-3)-6\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) Найдём результирующее преобразование:

$$BA=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot9-3\cdot6 & 2\cdot(-6)-3\cdot(-4) \\ 4\cdot9-6\cdot6 & 4\cdot(-6)-6\cdot(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом:

$$\begin{pmatrix} v_1'' \\ v_2'' \end{pmatrix} = (BA)\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot(-1)+0\cdot(-1) \\ 0\cdot(-1)+0\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\overline{v}'' = \overline{0}$ *(нулевой вектор)*

Матрица линейного преобразования в различных базисах

В начале мы выяснили происхождение матрицы линейного преобразования на примере оператора $\mathrm{A}(\bar{v}) = 2\bar{v}$ и ортонормированного базиса $(\bar{i}\,;\bar{j})$. Напоминаю: для того, чтобы записать матрицу линейного оператора в каком-либо базисе, нужно строго по порядку подействовать этим оператором на базисные векторы и полученные координаты занести в столбцы матрицы (слева направо). В результате «обработки» векторов $\bar{i}, \bar{j}$ нами была составлена матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ данного линейного преобразования в данном базисе.

Но ведь на «школьном» базисе свет клином не сошёлся! Ничто нам не мешает перейти к произвольному базису $(\bar{e}_1; \bar{e}_2)$, где это же линейное преобразование, очевидно, выразится другой матрицей. Но сам-то оператор не изменится – он будет по-прежнему увеличивать векторы плоскости в 2 раза. Таким образом, справедливо следующее утверждение, которое по существу уже было озвучено ранее:

Одно и то же линейное преобразование в разных базисах *в общем случае* **имеет РАЗНЫЕ матрицы**.

И следующие две задачи как раз посвящены этому вопросу:

Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису

Рассмотрим несколько необходимых теорем:

Теорема 11.1 Если для любого столбца $X=(x_1,\, x_1,\, ...,\, x_m)^T$ *имеет место равенство*

$$AX=BX,\ \text{где}\ A=(a_{ij});\ B=(b_{ij})\ (i=\overline{1,\,m};\quad j=\overline{1,\,m}), \qquad (11.6)$$

то $A=B$.

Доказательство. Так как равенство (11.6) имеет место для любого X, то оно будет справедливо для столбца $X=(1\ 0\ ...\ 0)^T$. Тогда

$$(a_{11}\quad a_{21}\quad ...\quad a_{m1})^T=(b_{11}\quad b_{21}\quad ...\quad b_{m1})^T,$$

откуда

$$a_{11}=b_{11},\quad a_{21}=b_{21},\quad \ldots,\quad a_{m1}=b_{m1}.$$

Аналогично доказывается равенство остальных элементов матрицы A соответствующих элементам матрицы B.

Теорема 11.2 *Если для любой матрицы-строки* $X=(x_1,\, x_1,\, ...,\, x_m)$ *имеет место равенство* $XA=XB$, *где* $A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij})\ (i=\overline{1,\,m};\quad j=\overline{1,\,m})$, то $A=B$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 11.1.

Теорема 11.3 *Если*

$$e_1, e_2, \ldots, e_n; \quad (11.7)$$

$$e'_1, e'_2, \ldots, e'_n \quad (11.8)$$

базисы некоторого линейного пространства и A *- матрица линейного оператора* f *в базисе* (11.7), *то матрица* B *этого оператора в базисе* (11.8) *имеет вид*

$$B = T^{-1}AT,$$

где T *- матрица перехода от базиса* (11.7) *к базису* (11.8).

Доказательство. Пусть вектор x имеет координаты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ в базисе (11.7) и $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$ в базисе (11.8), а вектор $y = f(x)$ имеет координаты $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ в базисе (11.7) и $\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_n$ в базисе (11.8). Тогда

$$X = TX'; \quad (11.9)$$

$$Y = TY'; \quad (11.10)$$

$$Y = AX; \quad (11.11)$$

$$Y' = BX'. \quad (11.12)$$

Умножив равенство (11.9) слева на матрицу A, получим

$$AX = ATX'$$

или, учитывая выражения (11.10) и (11.11),

$$TY' = ATX'.$$

Отсюда

$$Y' = T^{-1}ATX'.$$

Сравнивая последнее равенство с (11.12), имеем

$$BX' = T^{-1}ATX'.$$

Применяя теорему 11.1, окончательно получаем $B = T^{-1}AT$ - что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Если линейный оператор имеет в некотором базисе невырожденную матрицу, то и в любом другом базисе матрица этого оператора является невырожденной.*

Доказательство. Пусть A и B - матрицы данного оператора в двух различных базисах, причем $\det A \neq 0$. Так как $B = T^{-1}AT$, где T - невырожденная матрица, то $\det B = \det T^{-1} \det A \det T \neq 0$, т.е. матрица B также невырожденная.

Следствие 2. *Если* A *и* B *- матрицы линейного оператора в разных базисах, то* $r_A = r_B$.

<u>Например</u>, в базисе e_1, e_2 оператор f имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу оператора f в базисе $e_1' = 2e_1 + e_2$, $e_2' = 6e_1 + 4e_2$.

Решение. Так как

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -0{,}5 & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -0{,}5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 14 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Введем понятие подобия матриц. Матрица B называется ***подобной*** матрице A, если существует невырожденная квадратная матрица C, удовлетворяющая равенству

$$B = C^{-1}AC.$$

Из теоремы 11.3 следует, что матрица B линейного оператора f в базисе $e'_1, e'_2, ..., e'_n$ подобна матрице A того же оператора f в другом базисе $e_1, e_2, ..., e_n$,

так как эти матрицы связаны формулой $B = T^{-1}AT$, где T - невырожденная матрица перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ к базису $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, ..., \mathbf{e}'_n$.

Можно доказать, что *две квадратные матрицы A и B порядка n тогда и только тогда являются матрицами одного и того же линейного оператора пространства V_n в соответствующих базисах, когда матрица B подобна матрице A.*

<u>Пример</u>

В базисе $(\bar{e}_1;\bar{e}_2)$ задано линейное преобразование $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$. Найти матрицу данного преобразования в базисе $(\bar{e}'_1;\bar{e}'_2)$, если $\begin{cases}\bar{e}'_1=-2\bar{e}_1+5\bar{e}_2\\ \bar{e}'_2=-\bar{e}_1+2\bar{e}_2\end{cases}$

Решение: в условии задачи опять ничего не сказано о характере векторов, но для наглядности предположим, что данные базисы являются **аффинным базисами плоскости**. Как заметили внимательные читатели, предложенное линейное преобразование вытягивает все ненулевые объекты плоскости в направлении координатного вектора $\bar{e}_2$ в 2 раза, и наша задача состоит в том, чтобы записать матрицу A' <u>этого же преобразования</u> в новом базисе $(\bar{e}'_1;\bar{e}'_2)$. Для решения этого вопроса существует специальная формула:

$A'=T^{-1}\cdot A\cdot T$, где T – *матрица перехода* от базиса $(\bar{e}_1;\bar{e}_2)$ к базису $(\bar{e}'_1;\bar{e}'_2)$.

Составляется она просто: берём вектор $\bar{e}'_1=-2\bar{e}_1+5\bar{e}_2$ и «укладываем» коэффициенты его разложения (**внимание!**) в 1-й <u>столбец</u> матрицы:

$T=\begin{pmatrix}-2 & *\\ 5 & *\end{pmatrix}$. Затем рассматриваем вектор $\bar{e}'_2=-\bar{e}_1+2\bar{e}_2$ и заносим коэффициенты его разложения во 2-й столбец:

$$T=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$$

Внимание! Базисные векторы, в данном случае векторы $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2$, **следует «перебирать» строго по порядку!**

Остальное дело техники. Находим **обратную матрицу**:

$$T^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -5 & -2\end{pmatrix}$$

Произведение:

$$T^{-1}A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -5 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot1+1\cdot0 & 2\cdot0+1\cdot2\\ -5\cdot1-2\cdot0 & -5\cdot0-2\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -5 & -4\end{pmatrix}$$

И, наконец, матрицу рассматриваемого линейного преобразования в новом базисе:

$$A'=(T^{-1}A)\cdot T=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -5 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 5 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot(-2)+2\cdot5 & 2\cdot(-1)+2\cdot2\\ -5\cdot(-2)-4\cdot5 & -5\cdot(-1)-4\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 2\\ -10 & -3\end{pmatrix}$$

Пользуясь **ассоциативностью матричного умножения**, можно было сначала найти AT, а затем $T^{-1}\cdot(AT)$

Ответ: $A'=\begin{pmatrix}6 & 2\\ -10 & -3\end{pmatrix}$

Ещё раз повторим смысл задания: **само линейное преобразование не поменялось** – оно по-прежнему растягивает ненулевые объекты плоскости вдоль «старого» вектора $\bar{e}_2$ в 2 раза и не деформирует их в направлении вектора $\bar{e}_1$, но **в новом базисе** $(\bar{e}_1'; \bar{e}_2')$ матрица данного преобразования уже другая. И вы видите её в ответе.

Очевидно, что найденная матрица $T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$ задаёт *обратное преобразование*, т.е. выражает старые базисные векторы через новые.

Аккуратно «транспонируем» столбцы матрицы в коэффициенты соответствующей системы: $\begin{cases} \bar{e}_1 = 2\bar{e}_1' - 5\bar{e}_2' \\ \bar{e}_2 = \bar{e}_1' - 2\bar{e}_2' \end{cases}$. Таким образом, при желании всегда можно вернуться к старому базису: $A = TA'T^{-1}$. Обратная формула следует из простых логических соображений, но её можно вывести и формально – разрешив **матричное уравнение** $A' = T^{-1} \cdot A \cdot T$ относительно A.
Иногда матрицы A и A' называют *подобными*.

Какой базис удобнее? Конечно же, исходный, который задаётся матрицей $T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$ – он сразу позволяет выяснить характер линейного преобразования.

Трехмерный случай для самостоятельного решения:

Пример

Найти матрицу линейного преобразования в базисе $(\bar{e}_1'; \bar{e}_2'; \bar{e}_3')$, где $\bar{e}_1' = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3$, $\bar{e}_2' = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - 2\bar{e}_3$, $\bar{e}_3' = -\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3$, если она задана в базисе $(\bar{e}_1; \bar{e}_2; \bar{e}_3)$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Пожалуйста, не путайте это задание с Примером выше – по первой оглядке здесь тоже какие-то похожие равенства, тоже штрихи, но смысл совершено другой. Если там шла речь о двух линейных преобразованиях и взаимосвязи *координат* векторов, то здесь – об одном и том же преобразовании и взаимосвязи *векторов* двух базисов.

.

.

Решение: *Используем формулу* $A' = T^{-1}AT$. *Запишем матрицу перехода к новому базису:*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдём матрицу обратного перехода:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим:

$$T^{-1}A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5\cdot 2+3\cdot 3-1\cdot(-1) & 5\cdot 1+3\cdot 0-1\cdot 1 & 5\cdot 0+3\cdot 2-1\cdot 2 \\ 3\cdot 2+2\cdot 3-1\cdot(-1) & 3\cdot 1+2\cdot 0-1\cdot 1 & 3\cdot 0+2\cdot 2-1\cdot 2 \\ 1\cdot 2+1\cdot 3+0\cdot(-1) & 1\cdot 1+1\cdot 0+0\cdot 1 & 1\cdot 0+1\cdot 2+0\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 4 & 4 \\ 13 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A' = (T^{-1}A)\cdot T = \begin{pmatrix} 20 & 4 & 4 \\ 13 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 20\cdot 1+4\cdot(-1)+4\cdot 1 & 20\cdot(-1)+4\cdot 1+4\cdot(-2) & 20\cdot(-1)+4\cdot 2+4\cdot 1 \\ 13\cdot 1+2\cdot(-1)+2\cdot 1 & 13\cdot(-1)+2\cdot 1+2\cdot(-2) & 13\cdot(-1)+2\cdot 2+2\cdot 1 \\ 5\cdot 1+1\cdot(-1)+2\cdot 1 & 5\cdot(-1)+1\cdot 1+2\cdot(-2) & 5\cdot(-1)+1\cdot 2+2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -24 & -8 \\ 13 & -15 & -7 \\ 6 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $A' = \begin{pmatrix} 20 & -24 & -8 \\ 13 & -15 & -7 \\ 6 & -8 & -1 \end{pmatrix}$

Спасибо за внимание!