

Экзаменационный билет №7

1. (6 баллов) Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. (6 баллов) Найти фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$
3. (7 баллов) Найти образ, ядро, ранг и дефект линейного оператора $\hat{A}: L \rightarrow L$, где $L = \{p(t) = at^2 + bt + c: a, b, c \in R\}$, $\hat{A}p(t) = p(t + 1) - p(t)$.
4. (8 баллов) Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\hat{A}: L \rightarrow L$, где $L = \{p(t) = at^2 + bt: a, b \in R\}$, $\hat{A}p(t) = t \cdot \frac{d}{dt}(p(t + 1))$.
5. (7 баллов) Исследовать квадратичную форму $\Phi(\vec{x}) = -8x_1^2 - 2x_1x_2 - 6x_2^2 + 12x_2x_3 - 3x_3^2$ на знакоопределенность.
6. (8 баллов) В двумерном евклидовом пространстве матрица Грама и векторы \vec{x}, \vec{y} в базисе $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ соответственно равны $G = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Найти длины векторов \vec{x}, \vec{y} и угол между ними.
7. (8 баллов) Ортогональным преобразованием переменных приведите квадратичную форму $\Phi(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 2\sqrt{15}x_1x_2 + 2x_2^2$ к каноническому виду.