Линейная алгебра и аналитическая геометрия
Лекция 5
Тема: Евклидовы пространства

Литература:

1. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах. – СПб: Издательство «Лань», 2008, 256с.
2. Кремер Н.Ш. и др. Высшая математика для экономистов: Практикум.– М.: Юнити-Дана, 2007, 479с.
3. Ефимов А.В., Поспелов А.С. и др. Сборник задач по математике. Ч. 1. – М.: Физматлит, 2001.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1 – М.: Оникс, 2006.

Евклидово и унитарное пространство

10.1 Определение евклидовых пространств

В линейном пространстве V кроме операций сложения векторов и умножения вектора на действительное число введем еще одну операцию ***скалярное умножение*** векторов. Каждой упорядоченной паре векторов $x, y \in V$ поставим в соответствие действительное число, которое назовем их ***скалярным произведением*** и обозначим (x, y). Потребуем, чтобы для любых $x, y, z \in V$ и любого числа $\alpha \in R$ выполнялись следующие условия, называемые ***аксиомами скалярного произведения***:

I $(x, y) = (y, x)$.

II $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

III $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$.

IV $(x, x) > 0$ для всех $x \neq 0$, $(x, x) = 0$ для $x = 0$.

Скалярное произведение равно нулю, если хотя бы один из векторов нулевой. Действительно:

$$(0, y) = (0x, y) = 0(x, y) = 0. \tag{10.1}$$

Скалярное произведение (x, x) вектора x на себя называется ***скалярным квадратом*** этого вектора и обозначается x^2, т.е.

$$(x, x) = x^2.$$

Евклидовым пространством *называется линейное действительное пространство, в котором задана операция скалярного умножения векторов, удовлетворяющая аксиомам* **I – IV**. Если n-мерное линейное пространство является евклидовым, будем называть его евклидовым n-мерным пространством, а базис этого линейного пространства – базисом евклидова пространства.

Примеры евклидовых пространств.

1) Пусть M_3 **-** пространство свободных векторов. Для свободных векторов определена операция скалярного умножения, которая удовлетворяет аксиомам **I** – **IV**. Следовательно, пространство M_3 с введенной операцией скалярного умножения векторов является евклидовым.

2) Пусть R^n **-** арифметическое пространство. Каждой паре элементов $X=(x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n)$, $Y=(y_1;\, y_2;\, \ldots;\, y_n)$ этого пространства поставим в соответствие число

$$(X, Y)=x_1 y_1+x_2 y_2+\ldots+x_n y_n. \qquad (*)$$

Легко убедиться в том, что аксиомы **I** – **IV** выполняются, т.е. выражение (*) является скалярным произведением. Следовательно, пространство R^n с введенной операцией (*) скалярного умножения есть евклидово пространство.

3) В линейном пространстве $R_{n\times1}$ каждой паре матриц

$$X=[x_1\,x_2\ldots x_n]^T;\qquad Y=[y_1\;y_2\;\ldots\;y_n]^T$$

поставим в соответствие число

$$(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\,. \qquad (**)$$

Выражение (**) является скалярным произведением, так как аксиомы **I** – **IV** выполнены. Следовательно, пространство $R_{n\times1}$ с введенной операцией скалярного умножения есть евклидово пространство.

Поставим для себя следующий вопрос: можно ли в линейном пространстве матриц H_2^2, определенном над полем K, ввести скалярное произведение по формуле

$$(A,B)=a_1a_2-b_1b_2+c_1c_2-d_1d_2,$$

где $A=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix}$, $\qquad B=\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{pmatrix}$?

Нельзя, так как не выполняется аксиома **IV** скалярного произведения. Действительно, для матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

имеем $(A,A)=1-1=0$, хотя $A\neq\Theta$.

Из **II** и **III** аксиом вытекает следующая *формула для скалярного произведения линейных комбинаций систем векторов*:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i \sum_{j=1}^{i}\beta_j b_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\alpha_i\beta_j\left(a_i b_j\right). \qquad (10.2)$$

При любом n в n-мерном линейном пространстве V_n можно определить скалярное умножение, т.е. можно превратить это пространство в евклидово.

В самом деле, возьмем в пространстве V_n любой базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ Если

$$a=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i , \qquad b=\sum_{i-1}^{n}\beta_i e_i ,$$

то положим

$$(a, b)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i . \qquad (10.3)$$

Легко проверяется, что условия **I – IV** будут выполнены, т.е. равенство (10.3) определяет в пространстве V_n скалярное умножение.

В n-мерном линейном пространстве скалярное умножение можно задать, вообще говоря, многими различными способами. Очевидно, что (10.3) зависит от выбора базиса. Возникает вопрос – нельзя ли ввести скалярное умножение каким-либо принципиально иным способом? Нашей ближайшей целью является обозрение всех возможных способов превращения n-мерного линейного пространства в евклидово пространство и установление того, что в некотором смысле для всякого n существует одно единственное n-мерное евклидово пространство.

Ортогональные вектора. Система ортогональных векторов

Пусть дано произвольное n-мерное евклидово пространство E_n, т.е. в n-мерном линейном пространстве произвольным способом введено скалярное умножение. Векторы a и b называются ***ортогональными***, если их скалярное произведение равно нулю,

$(a, b) = 0$.

Очевидно, что нулевой вектор ортогонален любому вектору, т.е. $(0, a) = (0, b) = 0$.

Система векторов называется ***ортогональной системой***, если все векторы этой системы попарно ортогональны между собой.

Теорема 10.1 *Всякая ортогональная система ненулевых векторов линейно-независима.*

Доказательство. Пусть в E_n дана система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, причем все векторы этой системы ортогональны между собой, т.е.

$$(a_i, a_j) = 0 \text{ при } i \neq j. \qquad (10.4)$$

Допустим выполнено условие

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k = 0, \qquad (*)$$

Скалярно умножая обе части этого равенства на вектор a_i, $1 \leq i \leq k$, ввиду I, II и IV аксиом, получаем:

$$0 = (0, a_i) = (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k, a_i) = \alpha_1 (a_1, a_i) + \alpha_2 (a_2, a_i) + \ldots +$$
$$+ \alpha_k (a_k, a_i) = \alpha_i (a_i, a_i).$$

Отсюда, так как $(a_i, a_i) > 0$ по IV, вытекает, что нулю может быть равен только коэффициент $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Таким образом, условие (*) выполняется при $\alpha_i = 0$. Следовательно система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ - линейно независима.

Процесс ортогонализации

Процесс ортогонализации – способ перехода от любой линейно независимой системы из k векторов

$$a_1, a_2, \ldots, a_k \tag{10.5}$$

евклидова пространства E_n к ортогональной системе, также состоящей из k ненулевых векторов

$$b_1, b_2, \ldots, b_k$$

Положим $b_1 = a_1$, а вектор b_2 отличен от нуля. Пусть $b_2 = \alpha_1 b_1 + a_2$. Так как векторы a_1 и a_2 линейно независимы, то вектор b_2 отличен от нуля при любом числе α_1. Подберем это число из условия, что вектор b_2 должен быть ортогонален к вектору b_1:

$$0 = (b_1, b_2) = (b_1, \alpha_1 b_1 + a_2) = \alpha_1 (b_1, b_1) + (b_1, a_2),$$

откуда,

$$\alpha_1 = -\frac{(b_1, a_2)}{(b_1, b_1)}.$$

Пусть уже построена ортогональная система ненулевых векторс $b_1, b_2, \ldots, b_l$; дополнительно предположим, что для всякого i, $1 \le i \le l$, вектор i является линейной комбинацией векторов $a_1, a_2, \ldots, a_i$. Это предположение буде выполняться тогда и для вектора b_{l+1}, если он будет выбран в виде

$$b_{l+1} = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_l b_l + a_{l+1}.$$

Вектор b_{l+1} будет при этом отличен от нуля, так как система (10.5) линейно независимая, а вектор a_{l+1} не входит в записи векторов $b_1, b_2, \ldots, b_l$. Коэффициенты α_i, $i = 1, 2, \ldots, l$, подберем из условия, что вектор b_{l+1} должен быть ортогонален ко всем векторам b_i, $i = 1, 2, \ldots, l$:

$$0 = (b_i, b_{l+1}) = (b_i, \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_l b_l + a_{l+1}) = \alpha_1 (b_i, b_1) + \alpha_1 (b_i, b_2) + \ldots +$$
$$+ \alpha_1 (b_i, b_l) + (b_i, a_{l+1});$$

отсюда, так как векторы $b_1, b_2, \ldots, b_l$ ортогональны между собой, следует

$$\alpha_i (b_i, b_i) + (b_i, a_{l+1}) = 0,$$

т.е. $\alpha_i = -\dfrac{(b_i, a_{l+1})}{(b_i, b_i)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, l.$

Продолжая этот процесс, мы построим искомую ортогональную систему $b_1, b_2, \ldots, b_k$.

Применяя процесс ортогонализации к произвольному базису пространства E_n, мы получим ортогональную систему из n ненулевых векторов, т.е. *ортогональный базис*. При этом становится очевидным следующее утверждение.

Всякое евклидово пространство обладает ортогональными базисами, причем любой ненулевой вектор этого пространства входит в состав некоторого ортогонального базиса.

Норма вектора евклидова пространства

Нормой вектора евклидова пространства называется арифметическое значение корня из скалярного квадрата этого вектора. Норму вектора x обозначим $\|x\|$, тогда по определению

$$\|x\| = \sqrt{(x,\, x)} = \sqrt{x^2}\,. \qquad (10.6)$$

Норма вектора обладает следующими свойствами.

1 $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

2 $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, где α - действительное число.

3 $|(x,\, y)| \le \|x\| \cdot \|y\|$.

4 $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Докажем эти свойства

1 Из аксиомы **IV** скалярного произведения следует, что $\|x\| > 0$ для $x \ne 0$ и $\|x\| = 0$ при $x = 0$.

2 На основании аксиом **I** и **III** скалярного произведения получаем $\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha^2 (x,\, x)} = \sqrt{\alpha^2} \cdot \sqrt{(x,\, x)} = |\alpha| \cdot \|x\|$. Следовательно, верно, что $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.

3 Так как $\|x + y\|^2 \ge 0$, то

$$0 \le \|x + \alpha y\|^2 = (x + \alpha y,\, x + \alpha y) = (y,\, y)\alpha^2 + 2(x,\, y)\alpha + (x,\, x).$$

Эту сумму рассматриваем как квадратный трехчлен относительно α. Поскольку указанный трехчлен сохраняет знак, его дискриминант неположителен, т.е.

$$(x,\, y)^2 - (x,\, x)(y,\, y) \le 0,\; (x,\, y)^2 \le (x,\, x)(y,\, y).$$

Так как $\sqrt{(x,\, y)^2} = |(x,\, y)|$ и $\sqrt{(x,\, x)(y,\, y)} = \sqrt{(x,\, x)} \times \sqrt{(y, y)} = \|x\| \cdot \|y\|$, из последнего неравенства следует неравенство

$$|(x,\, y)| \le \|x\| \cdot \|y\|, \qquad (10.7)$$

которое называют ***неравенством Коши-Буняковского***.

4 Используя неравенство (10.7), получаем

$$\|x + y\|^2 = (x + y,\, x + y) = (x, x) + 2(x,\, y) + (y,\, y) \le \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x + y\|)^2,$$

откуда

$$\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|. \qquad (10.8)$$

Неравенство (10.8) называется ***неравенством треугольника***.

Например, запишем норму и неравенства (10.7), (10.8) для векторов (элементов) евклидовых пространств.

1 В евклидовом пространстве V_3 с обычным определением скалярного произведения норма вектора совпадает с его длиной, т.е. $\|a\| = |a|$; это следует из формулы (10.6). Неравенства (10.7) и (10.8) принимают соответственно вид

$$|(a, b)| \le |a| \cdot |b|,$$

$$|a + b| \le |a| + |b|.$$

Отметим, что неравенство $|a + b| \le |a| + |b|$ следует из определений суммы векторов и длины вектора; оно имеет простой геометрический смысл (в треугольнике сумма длин двух сторон больше длины третьей стороны).

В евклидовом пространстве E_n со скалярным произведением норма элемента $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определяется формулой

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2},$$

а неравенства (10.7) и (10.8) принимают вид

$$|x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n| \le \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2},$$

$$\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + \ldots + (x_n + y_n)^2} \le$$

$$\le \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}.$$

Угол между двумя векторами евклидова пространства

Из неравенства Коши-Буняковского получаем

$$\frac{|(x, y)|}{\|x\| \cdot \|y\|} \le 1, \text{ или } -1 \le \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \le 1;$$

следовательно, отношение $\frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$ можно рассматривать как косинус некоторого угла. *Углом между двумя векторами* x и y евклидова пространства называется угол φ, для которого

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \quad (0 \le \varphi \le 2\pi). \tag{10.9}$$

Отметим, что в пространстве V_3 всех свободных векторов введенное понятие угла совпадает с понятием угла, рассматриваемого в векторной алгебре.

Ортонормированный базис

Вектор a называется ***нормированным***, или ***единичным***, если $\|a\|=1$

Если a - ненулевой вектор, то каждый из векторов

$$a_1^0=\frac{a}{\|a\|}, \qquad a_2^0=-\frac{a}{\|a\|} \tag{10.10}$$

будет нормированным. Нахождение для данного вектора нормированного вектора по формуле (10.10) называется ***нормированием данного вектора***, а множитель $\mu=\pm\frac{1}{\|a\|}$ - ***нормирующим множителем***.

Система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ называется ортонормированной, если она ортогональна и каждый ее вектор является нормированным, т.е.

$$(e_i\, e_k)=\begin{cases}0, & \text{при}\ i\neq k,\\ 1, & \text{при}\ i=k,\end{cases} \tag{10.11}$$

где $i, k=1, 2, \ldots, n$.

Базис n-мерного евклидова пространства называется ***ортонормированным***, если базисные векторы образуют ортонормированную систему. Рассмотрим теорему о возможности выбора ортонормированного базиса в евклидовом пространстве.

Теорема 10.2 *Во всяком евклидовом n-мерном пространстве $(n\geq 2)$ существует ортонормированный базис.*

Доказательство этой теоремы основано на, описанном выше, способе перехода от любой линейной независимой системы векторов евклидова пространства E_n к ортогональной системе.

Примеры ортонормированных базисов:

1 В пространстве V_3 геометрических векторов любые три единичных попарно ортогональных вектора i, j, k образуют ортонормированный базис (i, j, k называют ***ортами***);

2 В евклидовом пространстве T_n и в унитарном пространстве T_n^* столбцы

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \qquad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

образуют ортонормированный базис.

Если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ - ортогональный базис n-мерного евклидова пространства, то любой вектор x этого пространства можно представить в виде

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n,$$

откуда

$$x_k = \frac{(x, e_k)}{(e_k, e_k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Последняя формула упрощается в случае ортонормированного базиса; при этом $(e_k, e_k) = 1$.

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

◀ Пусть в пространстве $\mathcal{E}_n$ задана система n линейно независимых элементов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$, образующих некоторый базис. Построим в $\mathcal{E}_n$ ортонормированную систему из n элементов с помощью линейного комбинирования этих элементов и операции вычисления нормы.

Положим $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1$. Найдем второй элемент $\boldsymbol{b}_2$, исходя из того, что он должен быть ортогонален первому элементу $\boldsymbol{b}_1$. Для этого положим

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \alpha_1 \boldsymbol{b}_1$$

и подберем постоянную α_1 так, чтобы $(b_2, b_1) = 0$. Из равенства

$$(b_2, b_1) = (a_2 - \alpha_1 b_1, b_1) = (a_2, b_1) - \alpha_1(b_1, b_1) = 0$$

получим

$$\alpha_1 = \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)}.$$

Таким образом, элемент

$$b_2 = a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1$$

ортогонален элементу b_1.

На основе построенных элементов b_1, b_2 и заданного элемента a_3 построим элемент

$$b_3 = a_3 - \beta_1 b_1 - \beta_2 b_2, \qquad (3.11)$$

который должен быть ортогонален как элементу b_1, так и элементу b_2. В этом случае коэффициенты β_1 и β_2 должны удовлетворять двум условиям:

$$(b_3, b_1) = 0 \quad \text{и} \quad (b_3, b_2) = 0.$$

Подставим в эти равенства элемент b_3 из соотношения (3.11), тогда с учетом ортогональности b_1 и b_2 получим соотношения

$$(b_3, b_1) = (a_3, b_1) - \beta_1(b_1, b_1) = 0; \quad (b_3, b_2) = (a_3, b_2) - \beta_2(b_2, b_2),$$

откуда

$$\beta_1 = \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)}; \quad \beta_2 = \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)}.$$

Таким образом, построен элемент

$$b_3 = a_3 - \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2,$$

ортогональный элементам b_1 и b_2.

Рассуждая аналогично, можно показать, что любой элемент

$$b_k = a_k - \frac{(a_k, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(a_k, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2 - \ldots - \frac{(a_k, b_{k-1})}{(b_{k-1}, b_{k-1})} b_{k-1} \qquad (3.12)$$

ортогонален элементам $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}$, $k = \overline{3, n}$.

Для обоснования приведенного алгоритма следует показать, что ни один из последовательно построенных элементов b_i, $i=\overline{1,n}$, не является нулевым, так как в противном случае процесс ортогонализации оборвался бы преждевременно. Покажем это. Предварительно отметим, что элемент b_k есть линейная комбинация элементов $b_1, b_2, ..., b_{k-1}, a_k$. Однако элемент b_{k-1} можно заменить линейной комбинацией элемента a_{k-1} и элементов $b_1, b_2, ..., b_{k-2}$ и т. д. Соответственно, элемент b_k можно записать следующим образом:

$$b_k = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_{k-1} a_{k-1} + a_k. \qquad (3.13)$$

Отсюда видно, что $b_k \neq \theta$, так как в противном случае правая часть равенства (3.13) была бы нулевым элементом, что противоречит условию линейной независимости элементов $a_1, a_2, ..., a_k$ (коэффициент при a_k равен единице). Итак, доказано, что $b_k \neq \theta$.

Полученная система элементов $b_1, b_2, ..., b_n$ — ортогональный базис. Разделив каждый из полученных элементов на его длину, построим ортонормированную систему (ортонормированный базис):

$$e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|},\ e_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|},\ ...,\ e_n = \frac{b_n}{\|b_n\|}. \ \blacktriangleright$$

Пример Проверить, что элементы

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

образуют базис в пространстве $\mathcal{E}_3$. Применить процесс ортогонализации к заданной системе элементов. Построить ортонормированный базис.

◀ Вычислим определитель матрицы $\mathbf{A}$, составленной из координатных столбцов заданных элементов:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -12 \end{vmatrix} = 27.$$

Поскольку $\det \mathbf{A} \neq 0$, система элементов a_1, a_2, a_3 — базис.

Построим с помощью этого базиса по формулам (3.12) сначала ортогональный базис $\{b\} = (b_1, b_2, b_3)$, а затем ортонормированный базис $\{e\} = (e_1, e_2, e_3)$.

Положим $b_1 = a_1$. Элемент b_2 будем искать в виде

$$b_2 = a_2 - \alpha_1 b_1 = a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{(-1)\cdot 1 + 0 \cdot (-2) + (-1)\cdot 2}{1+4+4} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}.$$

Множитель 1/3 можно отбросить и в качестве элемента b_2 взять $b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, коллинеарный полученному элементу.

Элемент b_3 найдем из соотношения

$$b_3 = a_3 - \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Отбросив общий множитель, равный 3, в качестве элемента b_3 возьмем элемент $b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Элементы b_1, b_2, b_3 образуют ортогональный базис. Пронормировав эти элементы, получим систему элементов, образующих ортонормированный базис:

$$e_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}. ▶$$

Выражение скалярного произведения через координаты векторов в ортонормированном базисе

Пусть в n-мерном евклидовом пространстве фиксирован ортонормированный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и даны векторы этого пространства

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n,$$

$$y = y_1e_1 + y_2e_2 + \ldots + y_ne_n.$$

Найдем скалярное произведение этих векторов. Принимая во внимание аксиомы скалярного произведения и формулу (10.11), получаем

$$(x, y) = (x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n,\ y_1e_1 + y_2e_2 + \ldots + y_ne_n) =$$

$$= \left(x_1e_1, \sum_{i=1}^{n} y_ie_i\right) + \left(x_2e_2, \sum_{i=1}^{n} y_ie_i\right) + \ldots + \left(x_ne_n, \sum_{i=1}^{n} y_ie_i\right) =$$

$$= (x_1e_1, y_1e_1) + (x_2e_2, y_2e_2) + \ldots + (x_ne_n, y_ne_n) =$$

$$= x_1y_1(e_1, e_1) + x_2y_2(e_2, e_2) + \ldots + x_ny_n(e_n, e_n) =$$

$$= x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n,$$

Итак

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

т.е., скалярное произведение двух векторов, заданных координатами в ортонормированном базисе, равно сумме произведений одноименных координат.

Очевидно,

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - координаты вектора x в ортонормированном базисе.

Разберем задачу:

В четырехмерном пространстве дан базис f_1, f_2, f_3, f_4. С помощью векторов этого базиса нужно построить ортонормированный базис того же пространства.

Решение. Сначала построим в заданном пространстве какой-нибудь ортогональный базис g_1, g_2, g_3, g_4.

Положим $g_1 = f_1$, $g_2 = f_2 + \alpha g_1$. Подберем действительно число α так, чтобы выполнялось условие $g_2 \perp g_1$. Умножив скалярно на g_1 обе части последнего равенства, получим

$(g_1, g_2) = (g_1, f_2) + \alpha(g_1, g_1)$.

Так как $(g_1, g_2) = 0$, то $\alpha = -(g_1, f_2)/(g_1, g_1)$.

Далее, в равенстве $g_3 = f_3 + \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2$ подберем β_1, β_2 так, чтобы выполнялись условия $g_3 \perp g_1$, $g_3 \perp g_2$. Из равенств

$(g_1, g_3) = (g_1, f_3) + \beta_1(g_1, g_1) + \beta_2(g_1, g_2)$,

$(g_2, g_3) = (g_1, f_3) + \beta_1(g_1, g_2) + \beta_2(g_2, g_3)$

получим $\beta_1 = -(g_1, f_3)/(g_1, g_1)$, $\beta_2 = -(g_2, f_3)/(g_2, g_2)$.

Наконец, из равенства $g_4 = f_4 + \gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_2 + \gamma_3 g_3$ находим

$\gamma_1 = -(g_1, f_4)/(g_1, g_1)$, $\gamma_2 = -(g_2, f_4)/(g_2, g_2)$, $\gamma_3 = -(g_3, f_4)/(g_3, g_3)$.

Итак, при сделанном выборе $\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ векторы g_1, g_2, g_3, g_4 попарно ортогональны. Значит, векторы

$$e_1 = \frac{g_1}{|g_1|}, \quad e_2 = \frac{g_2}{|g_2|}, \quad e_3 = \frac{g_3}{|g_3|}, \quad e_4 = \frac{g_4}{|g_4|}$$

образуют ортонормированный базис.

Понятие унитарного пространства

Комплексное линейное пространство R называется ***комплексным евклидовым пространством*** или ***унитарным пространством***, если в нем введено скалярное умножение элементов, т.е. указано правило, ставящее в соответствие любым двум элементам x и y комплексное число (будем обозначать его (x, y) и называть ***эрмитовым произведением*** элементов x и y), причем это правило удовлетворяет для любых x, y, z из R и любого комплексного числа α следующим требованиям (аксиомам эрмитового произведения):

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$.

2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$.

4) $(x, x) > 0$, если $x \neq \theta$ и $(x, x) = 0$, если $x = \theta$.

Отметим, что аксиома 1) отличается от соответствующей аксиомы I для вещественного евклидова пространства. Из аксиом 1) – 3) следует, что

$(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y)$

и $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$.

Проведем процесс ортогонализации Грама-Шмидта системы векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ базиса $\mathbf{B}$.

1) На первом шаге необходимо вычислить векторы $\overline{g_1}, \overline{e_1}$. Вычисляем вектор

$$\overline{g_1} = \overline{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

затем скалярное произведение и норму вектора $\overline{g_1}$

$$\left(\overline{g_1}, \overline{g_1}\right) = \overline{g_1}^T \cdot \overline{g_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + 0 + 1 = 2,$$

$$\left\|\overline{g_1}\right\| = \sqrt{\left(\overline{g_1}, \overline{g_1}\right)} = \sqrt{2},$$

и окончательно вектор

$$\overline{e_1} = \frac{\overline{g_1}}{\left\|\overline{g_1}\right\|} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad \left\|\overline{e_1}\right\| = 1.$$

2) На втором шаге необходимо вычислить векторы $\overline{g_2}, \overline{e_2}$. Сначала вычисляем скалярное произведение

$$\left(\overline{a_2}, \overline{e_1}\right) = \overline{a_2}^T \cdot \overline{e_1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

затем вектор

$$\overline{g_2} = \overline{a_2} - \left(\overline{a_2}, \overline{e_1}\right) \cdot \overline{e_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Теперь нормируем вектор $\overline{g_2}$:

$$\left\|\overline{g_2}\right\| = \sqrt{\left(\overline{g_2}, \overline{g_2}\right)} = \sqrt{\overline{g_2}^T \cdot \overline{g_2}} = \sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + 1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4} + 1 + \tfrac{1}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

получаем вектор $\overline{e_2}$

$$\overline{e_2} = \frac{\overline{g_2}}{\left\|\overline{g_2}\right\|} = \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}, \quad \left\|\overline{e_2}\right\| = 1.$$

3) На третьем шаге необходимо вычислить векторы $\overline{g}_3$, $\overline{e}_3$. Сначала вычисляем скалярные произведения

$$\left(\overline{a}_3, \overline{e}_1\right) = \overline{a}_3^{\,T} \cdot \overline{e}_1 = \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad \left(\overline{a}_3, \overline{e}_2\right) = \overline{a}_3^{\,T} \cdot \overline{e}_1 = \tfrac{5\sqrt{6}}{6},$$

затем вектор

$$\overline{g}_3 = \overline{a}_3 - \left(\overline{a}_3, \overline{e}_1\right)\cdot \overline{e}_1 - \left(\overline{a}_3, \overline{e}_2\right)\cdot \overline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} - \tfrac{5\sqrt{6}}{6}\cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Теперь нормируем вектор $\overline{g}_3$:

$$\left\|\overline{g}_3\right\| = \sqrt{\left(\overline{g}_3, \overline{g}_3\right)} = \sqrt{\overline{g}_3^{\,T} \cdot \overline{g}_3} = \tfrac{\sqrt{3}}{3},$$

получаем последний искомый вектор

$$\overline{e}_3 = \frac{\overline{g}_3}{\left\|\overline{g}_3\right\|} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}, \quad \left\|\overline{e}_3\right\| = 1.$$

Итак, ортонормированный базис $\mathbf{B}^{(0)} = \left(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\right)$ состоит из векторов:

$$\overline{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad \overline{e}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}, \quad \overline{e}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$$

Спасибо за внимание!