ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1. Определение линейного пространства. Примеры линейных пространств.

1. Линейные пространства.

Определение. Непустое множество элементов L называется линейным пространством, а его элементы векторами, если выполняются следующие условия:

1) Задана операция сложения, т.е. любым двум элементам $\vec{x}, \vec{y} \in L$ ставится в соответствие элемент $\vec{x}+\vec{y} \in L$, называемый их суммой.
2) Задана операция умножения вектора на число, т.е. любому элементу $\vec{x} \in L$ и числу $\alpha \in \mathbb{R}$ ставится в соответствие элемент $\alpha\vec{x} \in L$, называемый произведением элемента на число.
3) Для $\forall\ \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in L$, и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ выполняются следующие аксиомы:
   1. $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (коммутативность суммы)
   2. $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ (ассоциативность суммы)
   3. $\exists\vec{0} \in L: \forall\ \vec{x} \in L, \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ (существование нулевого вектора)
   4. $\forall\ \vec{x} \in L\ \exists(-\vec{x}) \in L$: $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$ (существование противоположного вектора)
   5. $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$
   6. $(\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$ (ассоциативность умножения на число)
   7. $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$ (дистрибутивность относительно суммы элементов)
   8. $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$ (дистрибутивность относительно суммы числовых множителей)

Замечание. Говорят, что *линейное пространство L замкнуто относительно операций сложения и умножения на число*, так как в результате выполнения этих операция мы получаем элементы того же пространства.

Замечание. Если задана операция умножения на вещественные числа, то *пространство называется вещественным*. Если задана операция умножения на комплексные числа, то *пространство называется комплексным*.

В нашем курсе будут изучаться только вещественные пространства.

2. Примеры линейных пространств.

1) Множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел
2) Множество геометрических векторов на прямой (на плоскости или в пространстве) - V_1, V_2, V_3.
3) Множество всех многочленов степени не выше n $P_n = \{p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n\}$.
4) Множество функций, определенных и непрерывных на отрезке $[a;b]$ - линейное пространство: $C_{[a;b]}$
5) Множество всех матриц $M_{m\times n}$ размерности $m \times n$ с действительными элементами.
6) Линейны пространством является множество арифметических векторов $\mathbb{R}^n$. Элементы множества $\mathbb{R}^n$ представляют собой упорядоченную совокупность n чисел: $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x_i \in \mathbb{R}$.
7) $L = \{\vec{0}\}$ - линейное пространство.

2. Понятие линейной зависимости и независимости системы векторов. Размерность и базис линейного пространства.

4. Линейная зависимость и независимость векторов.

Определение. ***Линейной комбинацией векторов*** $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in L$ называется выражение вида $\lambda_1\vec{x}_1 + \dots + \lambda_n\vec{x}_n$, где $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$.

Линейная комбинация называется ***тривиальной***, если все $\lambda_i = 0, i = \overline{1,n}$.

Определение линейной зависимости (л.з.). Система векторов S= $\{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n\} \in L$ называется ***линейно зависимой***, если найдутся такие числа $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$, не равные одновременно нулю , что $\lambda_1\bar{a}_1 + \dots + \lambda_1\bar{a}_n = \vec{0}$

Определение линейной независимости (л.н.з.). Если равенство $\lambda_1\bar{a}_1 + \dots + \lambda_n\bar{a}_n = \vec{0}$ возможно, только когда $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, то система векторов S= $\{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n\} \in L$ называется линейно независимой.

Теорема 1. Система из одного вектора линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.

Базис и размерность линейного пространства.

Пусть L- линейное пространство.

Определение. Система векторов $\{\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n\} \in L$ называется ***полной***, если любой вектор $\vec{x} \in L$ можно представить в виде линейной комбинации векторов системы: $\vec{x} = x_1\bar{e}_1 + \dots + x_n\bar{e}_n$.

Определение. Упорядоченная система векторов $\{\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n\} \in L$ называется ***базисом*** линейного пространства L , если она ***линейно-независимая и полная***.

$\vec{x} = x_1\bar{e}_1 + \dots + x_n\bar{e}_n$ – ***разложение вектора по базису;***

$(x_1 \dots x_n)$ – ***координаты вектора*** $\vec{x}$ ***в базисе*** $\{\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n\}$.

Теорема 3. Координаты вектора $\vec{x}$ в базисе S определены однозначно.

Определение. Максимальное число линейно-независимых векторов в данном линейном пространстве называется ***размерностью линейного пространства. Обозначается dim L=n.***

Если dim L=n, т.е. существует линейно-независимая система из n векторов, а любая система из (n+1) или более векторов линейно-зависима. Если *dim L=n*, то говорят, что линейное пространство n-мерно.

3. Закон преобразования координат вектора при переходе к другому базису. Матрица перехода от одного базиса линейного пространства к другому.

Преобразование координат вектора при переходе к другому базису. Линейные подпространства.

1. Преобразование координат вектора при переходе к другому базису.

Все базисы в линейном пространстве равноправны. При решении конкретных задач выбирается более удобный базис. При изменении базиса, изменяются и координаты вектора, и возникает задача преобразования координат вектора при переходе к другому базису.

Пусть L – линейное пространство, на котором заданы два базиса:

$S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$– старый базис в L;

$S' = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n\}$ – новый базис в L.

Любой вектор можно разложить по базису, поэтому разложим каждый вектор $\vec{f}_i$ нового базиса S' по старому базису S:

$$\vec{f}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \dots + a_{n1}\vec{e}_n = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1})$$

$$\dots$$

$$\vec{f}_n = a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \dots + a_{nn}\vec{e}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{nn})$$

Составим из полученных координат матрицу, записывая координаты векторов $\vec{f}_i$ **в столбцы**:

$$P = P_{S \to S'} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определение. Матрица P называется ***матрицей перехода от старого базиса S к новому базису S'.***

Замечание. Матрица перехода состоит из координат векторов нового базиса в старом, записанных ***по столбцам.***

Пример. Найти матрицу перехода от базиса $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ к базису $S' = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$, если $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

Решение: Матрица перехода состоит из координат векторов нового базиса в старом, записанных по столбцам: $P_{S \to S'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Определение линейного подпространства. Примеры. Критерий линейного подпространства. Дополнение базиса подпространства до базиса всего пространства.

2. Линейные подпространства

Определение. ***Линейным подпространством*** называется непустое подмножество H линейного пространства L, если оно само является линейным пространством относительно операций сложения и умножения на число, определенным в L.

Примеры подпространств:

1) Векторы в пространстве V_3, параллельные заданной плоскости.
2) Векторы в пространстве V_3, параллельные заданной прямой.
3) Все симметрические матрицы в пространстве квадратных матриц.
4) Все верхне-треугольные (нижне-треугольные) матрицы в пространстве квадратных матриц.

Все эти множества являются подпространствами, так как они замкнуты относительно операций сложения и умножения на число, заданных в пространстве.

Теорема. Для того, чтобы непустое подмножество H линейного пространства L было линейным подпространством, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in H \quad \vec{x} + \vec{y} \in H$ (замкнутость H относительно операции сложения);

2) $\forall\, \vec{x} \in H$ и $\alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha\vec{x} \in H$ (замкнутость H относительно операции умножения на число).

Определение. ***Линейной оболочкой*** $l(X) = l(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k)$ подмножества векторов $X = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k\}$ пространства L называется совокупность всевозможных линейных комбинаций элементов из X:

$$l(X) = \{\vec{x} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_k\vec{a}_k\} \mid \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k \in X, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

Основные свойства линейной оболочки:

1. Линейная оболочка $L(X)$ содержит само множество X.
2. $L(X)$ является линейным подпространство пространства L.
3. Размерность линейной оболочки $l(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k)$ равна рангу системы векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k\}$.

Теорема. Пусть H- подпространство в n-мерном линейном пространстве L. Если $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_k}\}$ - базис в H, дополнить до базиса L $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_k}, \dots \overline{e_n}\}$, то в базисе L все векторы из H, и только они, будут иметь координаты $x_{k+1} = \ldots = x_n = 0$.

Определение линейной зависимости функций: Система функций $S = \{f_1(t), \dots, f_n(t)\} \in C_{[a,b]}$ называется линейно зависимой, если найдутся такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in R$, не равные нулю одновременно, что $\lambda_1 f_1(t) + \cdots + \lambda_n f_n(t) = 0$ при любом значении t, то есть

$$\lambda_1 f_1(t) + \cdots + \lambda_n f_n(t) \equiv 0$$

***Определение линейной независимости функций*:**

Если $\lambda_1 f_1(t) + \cdots + \lambda_n f_n(t) \equiv 0$ возможно, только когда $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, то система функций $S = \{f_1(t), \dots, f_n(t)\} \in C_{[a,b]}$ называется линейно независимой.

Пусть функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ определены на некотором интервале $x \in (a, b)$ и имеют производные до $(n-1)$-го порядка включительно.

Определение. *Определителем Вронского (вронскианом)* $W(x)$ системы функций $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ называется определитель вида:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

5. Линейный оператор и его свойства. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к другому базису.

1. Понятие линейного оператора. Его свойства и примеры

Пусть L-линейное пространство;

Определение. $\hat{A}: L \to L$ называется отображением в линейном пространстве L, если каждому вектору $\vec{x} \in L$ ставится в соответствие единственный вектор $\vec{y} \in L$;

Тогда $\vec{y} = \hat{A}(\vec{x})$; $\vec{y}$- образ вектора $\vec{x}$; $\vec{x}$- прообраз $\vec{y}$.

Определение. Отображение $\hat{A}$, действующее в L, называется ***линейным оператором***, если выполняются следующие условия:

1) $\hat{A}(\vec{x} + \vec{y}) = \hat{A}\vec{x} + \hat{A}\vec{y}$; $\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in L$
2) $\hat{A}(\alpha\vec{x}) = \alpha\hat{A}\vec{x}$; $\forall\ \vec{x} \in L, \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$

Свойства линейного оператора .

$\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in L$; $\alpha; \beta \in \mathbb{R}$.

1) $\hat{A}(\vec{0}) = \vec{0}$
2) $\hat{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha\hat{A}\,\vec{x} + \beta\hat{A}\vec{y}$
3) $\hat{A}(-\vec{x}) = -\hat{A}\vec{x}$
4) $\hat{A}(\alpha\vec{x} - \beta\vec{y}) = \alpha\,\hat{A}\,\vec{x} - \beta\,\hat{A}\,\vec{y}$
5) $\hat{A}$ переводит линейно-зависимые векторы в линейно-зависимые.

2. *Матрица линейного оператора .*

Пусть L - конечномерное линейное пространство.

Определение. Матрицей линейного оператора $\hat{A}L \to L$, действующего в n-мерном линейном пространстве L с базисом $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ называется матрица, составленная из координат образов базисных векторов, записанных по столбцам.

Т.е., если в L существует некоторый базис S=$\{\vec{e_1}, \dots \vec{e_n}\}$, и

$\hat{A}\vec{e}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + \dots + a_{n1}\vec{e}_n$,

$\hat{A}\vec{e}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + \dots + a_{n2}\vec{e}_n$

....

$\hat{A}\vec{e}_n = a_{1n}\vec{e}_1 + \dots + a_{nn}\vec{e}_n$.

то A= $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

3. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса

Пусть в линейном пространстве L заданы два базиса $S_1 = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ и $S_2 = \{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\}$ и $\hat{\boldsymbol{A}}: L \to L$ – линейный оператор. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Матрицы A и A'линейного оператора $\hat{A}: L \to L$, записанные в базисах S_1(старый базис) и S_2(новый базис) соответственно, связаны формулой:

$$\boldsymbol{A' = P^{-1}AP},$$

где P - матрица перехода от старого базиса S_1 к новому базису S_2.

6. Линейные действия над операторами (умножение на число, сложение и умножение операторов) и их связь с линейными действиями над матрицами.

1. Действия над линейными операторами

Пусть L-линейное пространство. $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ линейные операторы: $L \to L, \alpha \in \mathbb{R}$.

Определение.

- Суммой $\widehat{A} + \widehat{B}$ называется оператор, действующий по правилу:
  $(\widehat{A} + \widehat{B})\vec{x} = \widehat{A}\,\vec{x} + \widehat{B}\vec{x}$;
- Произведением $\widehat{A} \cdot \widehat{B}$ называется оператор, действующий по правилу:
  $(\widehat{A} \cdot \widehat{B})\,\vec{x} = \widehat{A}(\widehat{B}\,\vec{x})$;
- Произведением $\alpha\,\widehat{A}$ называется оператор, действующий по правилу:
  $(\alpha\,\widehat{A})\,\vec{x} = \alpha(\widehat{A}\,\vec{x})$.

Теорема 4. Определенные таким образом операторы $\widehat{A} + \widehat{B}$; $\widehat{A} \cdot \widehat{B}$, $\alpha\widehat{A}$ являются линейными операторами.

◄ Докажем для $\widehat{A} \cdot \widehat{B} = \widehat{C}$;

$\widehat{C}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \widehat{A} \cdot \widehat{B}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \widehat{A}\,(\widehat{B}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y})) =$

$\widehat{A}\;(\alpha\,\widehat{B}\vec{x} + \beta\,\widehat{B}\vec{y}) = \alpha\;\widehat{A}\;\widehat{B}\vec{x} + \beta\,\widehat{A}\,\widehat{B}\vec{y}$;

$\widehat{A}\;(\alpha\,\widehat{B}\vec{x} + \beta\,\widehat{B}\vec{y}) = \alpha\;\widehat{A}\;\widehat{B}\vec{x} + \beta\,\widehat{A}\,\widehat{B}\vec{y} = \alpha\,\widehat{C}\,\vec{x} + \beta\,\widehat{C}\vec{y}$ =>

$\widehat{A} \cdot \widehat{B}$ – линейный оператор. ►

Теорема 5. Пусть линейные операторы $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ в конечномерном линейном пространстве L в базисе S имеют матрицы A и B соответственно. Тогда линейные операторы $\widehat{A} + \widehat{B}$; $\widehat{A} \cdot \widehat{B}$, $\alpha\widehat{A}$ имеют матрицы A+B, AB, αA соответственно.

7. **Ядро и образ линейного оператора. Обратный оператор. Матрица обратного оператора. Критерий обратимости линейного оператора.**

3. Ядро и образ линейного оператора, их свойства.

Определение. ***Образом линейного оператора*** $\hat{A}$ называется множество $\text{Im}\,\hat{A}$ всех векторов L , таких что, для любого $\vec{y} \in \text{Im}\,\hat{A}\ \exists \vec{x}:\ \hat{A}(\vec{x}) = \vec{y}$.

Определение . ***Ядром линейного оператора*** $\hat{A}$ называется множество $\text{Ker}\hat{A}$ всех векторов L , таких что, для любого $\vec{x} \in \text{Ker}\hat{A}$, $\hat{A}(\vec{x}) = \vec{0}$.

Пусть A - матрица линейного оператора $\hat{A}$ в некотором базисе. Тогда $\text{Ker}\,\hat{A}$ является решением однородной системы $A\vec{x} = \vec{0}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

или $AX = O$, где $O = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Определение. ***Рангом*** $Rang\,\hat{A}$ линейного оператора $\hat{A}$ называется размерность образа оператора:

$$Rang\,\hat{A} = \dim \text{Im}\,\hat{A}.$$

Определение. ***Дефектом*** $Defect\,\hat{A}$ линейного оператора $\hat{A}$ называется размерность ядра оператора:

$$Defect\,\hat{A} = \dim \text{Ker}\,\hat{A}.$$

2. Обратный оператор.

Определение. Оператор $\hat{A}^{-1}$ ***называется обратным*** к линейному оператору $\hat{A}$, действующему в пространстве L, если $\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = \vec{I}$,

где $\vec{I}$-тождественный оператор ($\vec{I}\vec{x} = \vec{x}$).

Таким образом, $\hat{A}(\hat{A}^{-1}\vec{x}) = \hat{A}^{-1}(\hat{A}\vec{x}) = \vec{I}\vec{x} = \vec{x}\ \ \forall \vec{x} \in L$

Если $\vec{y} = \hat{A}\vec{x} \Rightarrow \hat{A}^{-1}\vec{x} = \vec{y}$.

Теорема 10. ***(о размерности ядра и образа оператора).*** Если $\widehat{\boldsymbol{A}}: L \to L$ - линейный оператор, то сумма размерностей образа и ядра оператора $\widehat{\boldsymbol{A}}$ равна размерности пространства L:

$$\boldsymbol{Rang\,\widehat{A} + Defect\,\widehat{A} = \dim L.}$$

Следствие. Если $\operatorname{Ker} \widehat{\boldsymbol{A}} = \{\vec{0}\}$, то $\operatorname{Im} \widehat{\boldsymbol{A}} = L$ и наоборот.

Теорема 11. ***(критерии обратимости линейного оператора)***

1) Линейный оператор $\hat{A}$, действующий в линейном пространстве L, обратим тогда и только тогда, когда его матрица в каком-либо базисе невырожденная (det A$\neq$ 0).
2) Линейный оператор $\hat{A}$, действующий в линейном пространстве L, обратим тогда и только тогда, когда его образ совпадает со всем пространством L. $\operatorname{Im}\hat{A} = L$
3) Линейный оператор $\hat{A}$, действующий в линейном пространстве L, обратим тогда и только тогда, когда его ядро тривиально, т.е. $\operatorname{Ker}\hat{A} = \{\vec{0}\}$.

Следствие. Для того чтобы оператор $\widehat{\boldsymbol{A}}$ имел обратный $\widehat{\boldsymbol{A}}^{-1}$ необходимо и достаточно, чтобы $Rang\,\widehat{\boldsymbol{A}} = \dim L$.

8. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Нахождение собственных значений с помощью характеристического уравнения.

Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.

Пусть L - n-мерное линейное пространство.

$\hat{A}: L \to L$ – линейный оператор, действующий в L.

Определение. Ненулевой вектор $\vec{a}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$) в линейном пространстве L называют ***собственным вектором линейного оператора*** $\hat{\mathbf{A}}: L \to L$, отвечающим ***собственному значению*** $\boldsymbol{\lambda}$, ($\lambda \in R$), если $\hat{A}\vec{a} = \lambda\vec{a}$.

Примеры:

Рассмотрим линейный операторы, действующие в линейном пространстве V_3 и найдем их собственные значения и собственные векторы.

1) Оператор проектирования на плоскость XOZ:

$$\hat{A}(\alpha\bar{i}) = \alpha\bar{i}; \qquad \hat{A}(\alpha\bar{j}) = \bar{0} = 0\bar{j}; \qquad \hat{A}(\alpha\bar{k}) = \alpha\bar{k}.$$

Векторы, параллельные координатным осям являются собственными с собственными значениями *1;0;1.*

2) Гомотетия с коэффициентом k.

$\hat{A}(\bar{x}) = k\bar{x}$.; т.е. $\forall\bar{x} \in V_3$ является собственным с собственным значением $\lambda = k$.

3) $\hat{I}: L \to L$ – тождественный оператор: $\hat{I}\vec{x} = \vec{x} \Rightarrow \forall$ вектор $\vec{x} \in L$ является собственным с собственным значением $\lambda = 1$.

Определение. ***Характеристическим многочленом*** **матрицы** называется следующий многочлен $\boldsymbol{\chi(\lambda)}$ =**det** $(\mathrm{A} - \boldsymbol{\lambda E})$.

Определение. ***Характеристическим уравнением матрицы*** называется следующее уравнение : **det** $(\mathrm{A} - \boldsymbol{\lambda E}) = \mathbf{0}$. Его корни называются ***характеристическими числами*** матрицы.

Определение. ***Характеристическим многочленом и характеристическим уравнением линейного оператора*** называются соответственно характеристический многочлен и характеристическое уравнение его матрицы в каком-либо базисе.

Алгоритм нахождения собственных значений и собственных векторов линейного оператора.

1) Выбрать базис в линейном пространстве L и составить в нем матрицу A линейного оператора $\hat{A}$;
2) Составить характеристическое уравнение det $(A - \lambda E) = 0$ и найти все его действительные корни $\lambda_к$;
3) Для каждого $\lambda_к$ найти фундаментальную систему решений для однородной системы $(A-\lambda_к E)\vec{x}=0$. Найденная ФСР состоит из искомых собственных векторов.

Задача 1. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\hat{A}$, заданного в некотором базисе двумерного пространства матрицей:

$$4)\ A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение. Составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$, откуда получим $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 7$ – собственные значения.

Координаты собственного вектора $\vec{x} = (x_1;\ x_2)$, принадлежащего собственному значению λ, удовлетворяют матричному уравнению:

$$(A - \lambda E)X = O \Rightarrow \begin{pmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 2 & 5-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Или, что тоже самое, системе:

$$\begin{cases} (4-\lambda)x_1 + 3x_2 = 0, \\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 = 0. \end{cases}$$

При $\boldsymbol{\lambda_1 = 2}$ решаем систему $(A - 2E)X = O$:

$$\begin{pmatrix} 4-2 & 3 \\ 2 & 5-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow x_1 = -\tfrac{3}{2}x_2.$$

Выбирая в качестве свободной переменной x_2, т.е. $x_2 = C$, получим общее решение системы:

$$X^1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}C \\ C \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, C \neq 0; C \in \mathbb{R}; \Rightarrow$$

$\vec{\boldsymbol{x}}_1 = \left(-\frac{3}{2}C; C\right), C \in \mathbb{R}$ – все собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = 2$.

Полагая, например, $C = 2$, получим собственный вектор $\vec{f_1} = (-3; 2)$, который представляет собой фундаментальную систему решений данной системы.

При $\boldsymbol{\lambda_2 = 7}$ решаем систему $(A - 7E)X = O$:

$$\begin{pmatrix} 4-7 & 3 \\ 2 & 5-7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x_1 + 3x_2 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Выбирая в качестве свободной переменной x_2, т.е. $x_2 = C$, получим общее решение системы:

$$X^2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ C \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C \neq 0; C \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

Фундаментальная система решений состоит из одного вектора $\vec{f_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\vec{\boldsymbol{x}}_2 = (C; C), C \in \mathbb{R}$ – собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_2 = 7$.

9. Линейные операторы простого типа. Достаточное условие оператора простого типа. Матрица оператора простого типа.

1. Понятие линейного оператора. Его свойства и примеры

Пусть L-линейное пространство;

Определение. $\hat{A}: L \to L$ называется отображением в линейном пространстве L, если каждому вектору $\vec{x} \in L$ ставится в соответствие единственный вектор $\vec{y} \in L$;

Тогда $\vec{y} = \hat{A}(\vec{x})$; $\vec{y}$- образ вектора $\vec{x}$; $\vec{x}$- прообраз $\vec{y}$.

Определение. Отображение $\hat{A}$, действующее в L, называется ***линейным оператором***, если выполняются следующие условия:

1) $\hat{A}(\vec{x}+\vec{y}) = \hat{A}\vec{x} + \hat{A}\vec{y}$; $\forall$ $\vec{x}, \vec{y} \in L$
2) $\hat{A}(\alpha\vec{x}) = \alpha\hat{A}\vec{x}$; $\forall$ $\vec{x} \in L, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Свойства линейного оператора .

$\forall$ $\vec{x}, \vec{y} \in L$; $\alpha; \beta \in \mathbb{R}$.

1) $\hat{A}(\vec{0}) = \vec{0}$
2) $\hat{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha\hat{A}\vec{x} + \beta\hat{A}\vec{y}$
3) $\hat{A}(-\vec{x}) = -\hat{A}\vec{x}$
4) $\hat{A}(\alpha\vec{x} - \beta\vec{y}) = \alpha\hat{A}\vec{x} - \beta\hat{A}\vec{y}$
5) $\hat{A}$ переводит линейно-зависимые векторы в линейно-зависимые.

Примеры линейных операторов:

1) Нулевой оператор $\hat{\boldsymbol{O}}: L \to L$, отображающий любой вектор пространства L в нулевой вектор этого пространства: $\hat{\boldsymbol{O}}\vec{x} = \vec{0}$ $\forall$ $\vec{x} \in L$.
Действительно,
$\hat{\boldsymbol{O}}(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{0} = \hat{\boldsymbol{O}}\vec{x} + \hat{\boldsymbol{O}}\vec{y}$
$\hat{\boldsymbol{O}}(\alpha\vec{x}) = \vec{0} = \alpha\hat{\boldsymbol{O}}\vec{x}$
2) Тождественный оператор $\hat{\boldsymbol{I}}: L \to L$, отображающий любой вектор пространства L в себя: $\hat{\boldsymbol{I}}\vec{x} = \vec{x}$ $\forall$ $\vec{x} \in L$ является линейным оператором

Теорема 15. (достаточное условие оператора простого типа) Пусть dim L=n. Если $\hat{A}: L \to L$ имеет n попарно различных собственных значений, то он является оператором простого типа.

►По теореме 14 собственные векторы имеющие различные собственные значения линейно-независимы , тогда в пространстве размерности n существует n линейно-независимых собственных векторов. Следовательно, они образуют базис. Тогда по определению линейный оператор $\hat{A}$ — простого типа. ◄

Замечание. Обратное утверждение не верно, например, тождественный оператор $\hat{I}$ является оператором простого типа и имеет единственное собственное значение $\lambda = 1$.

2. *Матрица линейного оператора .*

Пусть L - конечномерное линейное пространство.

Определение. Матрицей линейного оператора $\widehat{\mathbf{A}}L \to L$, действующего в n-мерном линейном пространстве L с базисом $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ называется матрица, составленная из координат образов базисных векторов, записанных по <u>столбцам.</u>

Т.е., если в L существует некоторый базис S=$\{\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_n}\}$, и

$$\widehat{\mathbf{A}}\vec{e}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + \dots + a_{n1}\vec{e}_n,$$

$$\widehat{\mathbf{A}}\vec{e}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + \dots + a_{n2}\vec{e}_n$$

………..

$$\widehat{\mathbf{A}}\vec{e}_n = a_{1n}\vec{e}_1 + \dots + a_{nn}\vec{e}_n.$$

то A= $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Примеры:

1. Нулевой оператор $\widehat{\mathbf{O}}: L \to L$, $\dim L = n \Rightarrow$

   $\widehat{\mathbf{O}}\vec{e}_1 = \vec{0} = (0, \dots, 0)$,

   ………..

   $\widehat{\mathbf{O}}\vec{e}_n = \vec{0} = (0, \dots, 0)$

   $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

10. Билинейные формы в линейном пространстве. Квадратичные формы. Матрица квадратичной формы. Преобразование матрицы квадратичной формы

2. Квадратичные формы.

Определение. Функция $\boldsymbol{\varphi(\overline{x}) = A(\overline{x}, \overline{x})}$, где $A(\overline{x}, \overline{y})$ -симметричная билинейная форма, называется ***квадратичной формой.***

Матрица квадратичной формы в базисе $\{\overline{e}_1; \overline{e}_2 \dots \overline{e}_n\}$:

$$A=\begin{pmatrix} A(\overline{e}_1;\overline{e}_1) & \dots & A(\overline{e}_1;\overline{e}_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ A(\overline{e}_n;\overline{e}_1) & \dots & A(\overline{e}_n;\overline{e}_n) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A – симметричная матрица, $a_{ij} = a_{ji}$

$$\boldsymbol{\varphi(\overline{x}) = (x_1 \dots x_n)A\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j}$$

$(x_1 \dots x_n)A\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – векторно-матричная форма записи квадратичной формы;

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ – координатная форма записи квадратичной формы

Для квадратичной формы в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

$$\varphi(\overline{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2$$

Пример 1. Рассмотрим $\varphi(\vec{x}) = x_1^2 - 4x_1x_2$ на пространстве V_2.

$$\varphi(\vec{x}) = x_1^2 - 4x_1x_2 = (x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2) - 4x_2^2 = (x_1 - 2x_2)^2 - 4x_2^2 = y_1^2 - y_2^2.$$

Квадратичная форма приведена к нормальному виду.

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 \\ y_2 = 2x_2 \end{cases}$$

Проверим выполнение формулы $A_2 = P^T A_1 P$;

Для этого запишем преобразование координат в виде: $Y=P^{-1}X$;

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $P=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

P можно было найти, выразив x_i через y_i :

$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_2/2 \end{cases}$; X=PY => $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

$$A_2 = P^T A_1 P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \text{ верно.}$$

11. **Канонический и нормальный вид квадратичной формы. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду. Положительный и отрицательный индексы, ранг. Закон инерции квадратичных форм, три инварианта квадратичной формы.**

1. Квадратичная форма канонического вида.

Определение. Квадратичную форму $\boldsymbol{\varphi(\overline{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_i x_i^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2}$, не имеющую попарных произведений переменных, называют ***квадратичной формой канонического вида.***

Базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, называют ***каноническим базисом.***

В каноническом базисе матрица квадратичной формы имеет диагональный вид: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \lambda_i & \vdots \\ 0 & 0 \cdots 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

Если $\lambda_i = \{0, \pm 1\}$, i=$\overline{1:n}$, то говорят, что квадратичная форма приведена к ***нормальному виду.***

Метод Лагранжа.

Один из методов приведения квадратичной формы к каноническому виду путем замены переменных состоит в последовательном выделении полных квадратов. Такой метод называется методом Лагранжа.

Пример 1. Рассмотрим $\varphi(\vec{x}) = x_1^2 - 4x_1x_2$ на пространстве V_2.

$$\varphi(\vec{x}) = x_1^2 - 4x_1x_2 = (x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2) - 4x_2^2 = (x_1 - 2x_2)^2 - 4x_2^2 = y_1^2 - y_2^2.$$

Квадратичная форма приведена к нормальному виду.

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 \\ y_2 = 2x_2 \end{cases}$$

Проверим выполнение формулы $A_2 = P^T A_1 P$;

Для этого запишем преобразование координат в виде: $Y = P^{-1}X$;

1

РТУ МИРЭА кафедра ВМ-2 Морозова Т.А.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \ P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

P можно было найти, выразив x_i через y_i :

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_2/2 \end{cases}; \quad X = PY \ \Rightarrow \ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

$$A_2 = P^T A_1 P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \text{ верно.}$$

Определение. Положительный индекс $\boldsymbol{r_+}$ - это *количество положительных коэффициентов в каноническом виде.*

Определение. Отрицательный индекс $\boldsymbol{r_-}$ - это *количество отрицательных коэффициентов в каноническом виде.*

Очевидно, что $\mathbf{rang}\,\boldsymbol{\varphi(\vec{x})} = \boldsymbol{r_+ + r_-}$

Теорема 6. ***Закон инерции квадратичных форм.***

Количество положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы не зависит от выбора канонического базиса.

12. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

Определение. Квадратичная форма называется ***положительно определенной***, если $\forall \vec{x} \neq \vec{o} : \varphi(\vec{x}) > 0$

Определение. Квадратичная форма называется ***отрицательно определенной***, если $\forall \vec{x} \neq \vec{o} : \varphi(\vec{x}) < 0$

Если квадратичная форма не является положительно или отрицательно определенной, то говорят, что она ***общего вида*** или ***знакопеременная***.

Примеры.

1) $\varphi(\vec{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2$- положительно определенная;
2) $\varphi(\vec{x}) = -x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_3^2$- отрицательно определенная;
3) $\varphi(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_3^2$ – общего вида , так как $\varphi(0\,,1{,}0)$=0.

2 способ - по критерию Сильвестра

Теорема 8. Критерий Сильвестра. Квадратичная форма положительно определена $\Leftrightarrow$ все главные (угловые) миноры матрицы квадратичной формы положительные.

►

Необходимость: Если квадратичная форма $\varphi(\overline{x})$ положительно определена, то в ее каноническом виде все коэффициенты положительны, а матрица имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \lambda_i & \vdots \\ 0 & 0 \cdots 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

$\det A = \lambda_1 \ldots\ldots \lambda_n > 0$;

При переходе к другим переменным

$\det (P^T A_1 P) = (\det P)^2 \det A_1 > 0$

Рассмотрим квадратичную форму $\varphi_k(\overline{x}) =$ $\varphi_k(x_1, \ldots x_k) = \varphi(x_1, \ldots x_k, 0, \ldots 0)$ от k переменных, также положительно определенную, и следовательно определитель ее матрицы $\Delta_k > 0$ при k=$\overline{1, n}$. => все главные миноры матрицы положительны;

Достаточность: без доказательства. ◄

Следствие. Квадратичная форма отрицательно определена $\Leftrightarrow$ знаки главных миноров матрицы квадратичной формы чередуются, начиная с минуса ►

Критерий Сильвестра для трехмерного пространства.

1) $\begin{matrix} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 > 0 \end{matrix}$ $\Leftrightarrow$ квадратичная форма положительно определена

2) $\begin{matrix} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 < 0 \end{matrix}$ $\Leftrightarrow$ квадратичная форма отрицательно определена

3) Во всех остальных случаях квадратичная форма знакопеременная, или общего вида.

13. Определение евклидова пространства. Евклидово скалярное произведение и его матрица Грама.

Определение. Линейное пространство E называется ***евклидовым пространством***, если в нем задано скалярное произведение.

Определение. ***Скалярным произведением*** векторов $\bar{x}, \bar{y} \in E$ называется числовая функция $(\bar{x}, \bar{y})$, если выполнены условия (аксиомы):

$\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

1) $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$
2) $(\lambda \bar{x}, \bar{y}) = \lambda(\bar{x}, \bar{y})$
3) $(\vec{x} + \vec{z}, \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{z}, \vec{y})$;
4) $(\bar{x}, \bar{x}) \geq 0$, причем $(\bar{x}, \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$;

Другими словами, скалярное произведение – симметричная билинейная форма. Причем, соответствующая ей квадратичная форма-положительно определенная.

В произвольном линейном пространстве можно ввести скалярное произведение, причем различными способами.

Матрица Грама

Определение. Матрица из попарных скалярных произведений векторов в фиксированном базисе Б называется *матрицей Грама скалярного произведения в этом базисе:*

$$G_{\vec{Б}} = \begin{pmatrix} (\vec{e}_1, \vec{e}_1) & (\vec{e}_1, \vec{e}_2) & \dots & (\vec{e}_1, \vec{e}_n) \\ (\vec{e}_2, \vec{e}_1) & (\vec{e}_2, \vec{e}_2) & \dots & (\vec{e}_2, \vec{e}_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\vec{e}_n, \vec{e}_1) & (\vec{e}_n, \vec{e}_2) & \dots & (\vec{e}_n, \vec{e}_n) \end{pmatrix}$$

Пусть в евклидовом пространстве в некотором базисе заданы два вектора

$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$; $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$;

тогда $(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j = (x_1 \dots x_n) \cdot G \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = X^T \cdot G \cdot Y$;

14. Неравенство Коши - Буняковского. Длины векторов и углы между векторами в евклидовом пространстве. Неравенство треугольника.

Теорема (неравенство Коши-Буняковского).

Для любых векторов $\vec{x}, \vec{y}$ евклидова пространства справедливо *неравенство Коши-Буняковского* $(\overline{x}, \overline{y})^2 \leq (\vec{x}, \vec{x}) \cdot (\vec{y}, \vec{y})$

◄

1. При $\bar{x} = \overline{0}$ обе части неравенства равны 0 => неравенство выполняется
2. Пусть $\bar{x} \neq \overline{0}$ $(\lambda\bar{x} - \bar{y}, \lambda\bar{x} - \bar{y}) \geq 0 \ \forall \lambda$ в силу аксиомы 4.
   $(\lambda\bar{x}, \lambda\bar{x} - \bar{y}) - (\bar{y}, \lambda\bar{x} - \bar{y}) = \lambda^2(\bar{x}, \bar{x}) - \lambda(\bar{x}, \bar{y}) - \lambda(\bar{y}, \bar{x}) + (\bar{y}, \bar{y}) = \lambda^2(\bar{x}, \bar{x}) - 2\lambda(\bar{x}, \bar{y}) + (\bar{y}, \bar{y}) \geq 0$

   Это квадратный трехчлен относительно λ.

   $(\bar{x}, \bar{x}) > 0$ => трехчлен ≥ 0, если $D \leq 0$

   $D = 4(\bar{x}, \bar{y})^2 - 4(\bar{x}, \bar{x})(\bar{y}, \bar{y}) \leq 0$ =>

   $(\bar{x}, \bar{y})^2 \leq (\vec{x}, \vec{x}) \cdot (\vec{y}, \vec{y})$; ►

Теорема. Всякое скалярное произведение в евклидовом пространстве определяет норму вектора согласно формуле: $\|\bar{x}\|=\sqrt{(\bar{x},\bar{x})}$. Эта норма называется ***евклидовой.***

◄ Согласно аксиоме скалярного произведения для $(\bar{x},\bar{x}) \geq 0$; $\forall \bar{x}$ => функция $\|\bar{x}\|=\sqrt{(\bar{x},\bar{x})}$ определена $\forall \bar{x} \in E$ - евклидову пространству. Проверим выполнение всех аксиом нормы.

а) следует из аксиомы 4 скалярного произведения;

б) следует из аксиомы 2 скалярного произведения;

$$\|\lambda\bar{x}\|=\sqrt{(\lambda\bar{x},\lambda\bar{x})}=\sqrt{\lambda^2(\bar{x},\bar{x})}=|\lambda|\,\|\bar{x}\|$$

в) запишем неравенство Коши-Буняковского в виде:

$(\bar{x},\bar{y}) \leq \sqrt{(\bar{x},\bar{x})}\sqrt{(\bar{y},\bar{y})}$, т.е. $(\bar{x},\bar{y}) \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$;

$\|\bar{x}+\bar{y}\|^2 = (\bar{x}+\bar{y},\bar{x}+\bar{y})=(\bar{x},\bar{x})+2(\bar{x},\bar{y})+(\bar{y},\bar{y}) \leq$

$(\bar{x},\bar{x})+2\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|+(\bar{y},\bar{y}) = (\|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|)^2$ =>

$\|\bar{x}+\bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ ►

Определение: Углом между ненулевыми векторами в евклидовом пространстве называют значение $\varphi \in [0,\pi]$, определяемое равенством

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{x},\bar{y})}{\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|}$$

Корректность формулы следует из *неравенства Коши-Буняковского*:

$\forall \vec{x},\vec{y} \in E \ \ |(\bar{x},\bar{y})| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$

Если один из векторов нулевой, то угол не определен.

Определение: Два ненулевых вектора называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю. Обозначается $\bar{x} \perp \bar{y}$.

Пример. Доказать, что в евклидовом пространстве C[0;1] векторы f(x)≡ 2 и g(x)=2x-1 ортогональны.

$(f,g) = \int_0^1 fg\,dx = \int_0^1 2(2x-1)dx = 2\,(x^2-x)|_0^1 = 0 \Rightarrow f \perp g.$

Утверждение. Нулевой вектор ортогонален любому вектору.

$$(\bar{x},\bar{0}) = (\bar{x},0\cdot\bar{0}) = 0(\bar{x},\bar{0}) = 0.$$

15. Матрица Грама скалярного произведения. Координатная и векторноматричная запись скалярного произведения. Критерий матрицы Грама. Преобразование матрицы Грама при замене базиса.

Матрица Грама

Определение. Матрица из попарных скалярных произведений векторов в фиксированном базисе Б называется *матрицей Грама скалярного произведения в этом базисе:*

$$G_{\vec{Б}} = \begin{pmatrix} (\vec{e}_1, \vec{e}_1) & (\vec{e}_1, \vec{e}_2) & \dots & (\vec{e}_1, \vec{e}_n) \\ (\vec{e}_2, \vec{e}_1) & (\vec{e}_2, \vec{e}_2) & \dots & (\vec{e}_2, \vec{e}_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\vec{e}_n, \vec{e}_1) & (\vec{e}_n, \vec{e}_2) & \dots & (\vec{e}_n, \vec{e}_n) \end{pmatrix}$$

Пусть в евклидовом пространстве в некотором базисе заданы два вектора

$\overline{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$; $\overline{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$;

тогда $(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_i \, y_j = (x_1 \dots x_n) \cdot G \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = X^T \cdot G \cdot Y$;

16. Ортогональный и ортонормированный базис. Процесс ортогонализации базиса. Алгоритм Грама-Шмидта.

17. Самосопряженные операторы и их свойства.

18. Ортогональные операторы и их свойства.

19. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом ортогональных преобразований.

20. **Приложение теории квадратичных форм к исследованию кривой и поверхности второго порядка.**