Линейная алгебра и аналитическая геометрия
Лекция 2
Тема:Линейные пространства

Системы линейных уравнений

Займёмся общими системами m линейных уравнений

$$(\bigstar)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

с n неизвестными для произвольных $m,\ n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$. **Коэффициенты** a_{ij} и **свободные члены** b_j чаще всего являются вещественными числами. Встречаются задачи, где они комплексные, рациональные, либо ещё более хитрые, но поначалу это не существенно для нашей будущей теории. Поэтому будем обозначать через $\mathbb{F}$ **основную** числовую систему, в которой лежат значения всех известных и неизвестных букв.

Изучая линейные системы, удобно оставлять в тени неизвестные и выписывать лишь **основную** и **расширенную матрицы** системы:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Решением системы $(\bigstar)$ называют список $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$ элементов $\mathbb{F}$, подстановка которых вместо x_i превращает все уравнения системы $(\bigstar)$ в тождества. По количеству решений системы делятся на совместные и несовместные, на определённые и неопределённые:

Решения	*система*	
нет	несовместна	определена
одно	совместна	определена
много	совместна	неопределена

Две линейные системы одинаковых размеров **эквивалентны**, если множества их решений одинаковы. Два простых преобразования переводят систему в ей эквивалентную:

(R1) умножение одного уравнения на ненулевой элемент $\alpha \in \mathbb{F}$;
(R2) прибавление к одному уравнению другого.

Комбинациями этих примитивов представимы преобразования:

(R2′) прибавление к одному уравнению другого, помноженного на любой элемент из $\mathbb{F}$;
(R3) перестановка пары уравнений местами.

Часто список **элементарных преобразований** составляют из преобразований (R1), (R2′) и (R3): это удобнее для применений на практике, в то время как простота (R1) и (R2) удобна в доказательствах.

Лемма. *Две линейные системы эквивалентны, если одна получается из другой конечной цепочкой элементарных преобразований.* □

5.2. Метод исключения неизвестных

Чтобы перейти от данной системы к более простой, путём элементарных преобразований методично зануляют коэффициенты.

Пример. Для системы уравнений выписана расширенная матрица:

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_3 + 5x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 - 2x_3 + 4x_4 - 5x_5 = -6, \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 4 & -5 & -6 \end{array}\right].$$

Эта система элементарными преобразованиями…

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ 0x_1 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 5, \\ x_1 - 2x_3 + 4x_4 - 5x_5 = -6, \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -2 & 4 & -5 & -6 \end{array}\right],$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ 0x_1 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 5, \\ 0x_1 - x_3 + x_4 - 3x_5 = -5, \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & -5 \end{array}\right],$$

$$\begin{cases} -x_1 + 0x_3 - 2x_4 - x_5 = -4, \\ 0x_1 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 5, \\ 0x_1 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0, \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

приводится к виду

$$\begin{cases} x_1 + 0x_3 + 2x_4 + x_5 = 4, \\ 0x_1 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 5, \\ 0x_1 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0, \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Общее решение исходной системы можно записать в виде

$$\begin{cases} x_1 = 4 - 2x_4 - x_5, \\ x_3 = 5 + x_4 - 3x_5, \\ x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \text{ — произвольные.} \end{cases}$$

Значит, система совместна и неопределена; при каждом наборе значений **параметров** x_2, x_4, x_5 имеется одно решение.

Матрицу коэффициентов назовём **ступенчатой**, когда:

(1) первый слева ненулевой элемент каждой строки есть единица, называемая **главной**;
(2) столбец, содержащий главную единицу, в остальном нулевой;
(3) главные единицы уходят направо и вниз:

$$\begin{bmatrix} \ldots 0 & 1 & * & * \ldots 0 & * & * \ldots * & 0 & * \\ \ldots 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 1 & * & * \ldots * & 0 & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 1 & * \\ \ldots 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Как и в рассмотренном выше примере, решения системы ступенчатого вида выписывают непосредственно по её расширенной матрице. При этом множества решений у любой пары различных систем ступенчатого вида обязательно получаются различны.

Теорема. *Всякая система линейных уравнений эквивалентна (единственной) системе ступенчатого вида.*

Следствие. (1) *Число параметров, описывающих множество решений совместной системы, равно числу неглавных столбцов.*
(2) *Система определена* $\iff$ *все столбцы главные.*
(3) *Система совместна* $\iff$ *каждой нулевой строке соответствует нулевой свободный член.*

Наличие нулевых строк в расширенной ступенчатой матрице сигнализирует, что исходная система избыточна: лишние уравнения можно отбросить, не изменив множество решений. Какие именно уравнения излишни, сказать нелегко, но *количество* существенных уравнений видно: оно равно количеству главных единиц.

Рабочее определение. **Рангом** матрицы A назовём количество ненулевых строк в ступенчатом виде, к которому A приводится.

Рабочим это определение является сразу в двух смыслах:

(1) вскоре его заменят «настоящие» определения ранга, коих будет целых три;
(2) даже после грядущей замены, практически найти ранг матрицы обычно быстрее всего именно приведением её к ступенчатому виду.

Следствие (критерий совместности). *Линейная система совместна* $\iff$ *ранги основной и расширенной матриц равны.*

Следствие. *Совместная система имеет единственное решение* $\iff$ *число неизвестных равно рангу системы.*

... Линейные пространства строк и столбцов

Работая с векторами в фиксированной системе координат, мы оперируем над столбцами их координат; эти столбцы мы можем складывать и умножать на скаляры. Решая линейные системы элементарными преобразованиями, мы оперируем над строками расширенной матрицы; эти строки мы можем складывать и умножать на числа (тоже называемые скалярами). Дальнейшее изучение математики и физи постоянно будет сталкивать студента с объектами самой разной природы, которые можно складывать и умножать на скаляры. Как правило,

при этом выполнены 8 привычных свойств сложения и умножения, перечисленных в самом первом разделе лекций.

Множество $\mathcal{L}$ с двумя такими операциями называют **линейным** или **векторным пространством**. Элементы любого линейного пространства называют векторами.

МИРЭА Российский технологический университет

Понятие линейного пространства

Рассмотрим множество V элементов $x, y, z, \ldots$ и множество R действительных чисел. Определим операцию «***сложения***» элементов множества V (ее называют *внутренней* операцией): любой упорядоченной паре элементов $x \in V$, $y \in V$ поставим в соответствие третий элемент $z \in V$, называемый их «***суммой***», будем писать в этом случае $z = x + y$.

Введем также операцию ***«умножения»*** элементов множества V на действительное число (эту операцию называют *внешней*); каждому элементу $x \in V$ и действительному числу $\alpha \in R$ поставим в соответствие элемент $z = \alpha x = x\alpha$, где $z \in V$. Потребуем, чтобы операция «сложения» элементов множества V и операция «умножения» элементов этого множества на действительное число удовлетворяли следующим ***аксиомам***:

I Сложение коммутативно, т.е. $x + y = y + x$ для любых $x \in V$, $y \in V$.

II Сложение ассоциативно, т.е. $(x + y) + z = x + (y + z)$ для любых $x \in V$, $y \in V$, $z \in V$.

III Существует нулевой элемент, т.е. такой элемент, который в сумме с любым элементом x дает тот же элемент x; обозначим нулевой элемент символом θ, тогда $x + \theta = x$, для любого $x \in V$.

IV Для каждого элемента $x \in V$ существует противоположный элемент, т.е. такой элемент, который в сумме с данным дает нулевой элемент; элемент, противоположный элементу x, обозначим через $-x$, тогда $x + (-x) = \theta$ для любого $x \in V$.

V Умножение на число 1 не меняет элемента, т.е. $1 \cdot x = x$ для любого $x \in V$.

Для любых $x, y \in V$, $\alpha, \beta \in R$:

VI $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

VII $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

VIII $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

Множество V элементов $x, y, z, \ldots$, в котором определены операции «сложения» элементов и «умножения» элемента на действительное число, удовлетворяющие аксиомам I – VIII, называется ***действительным линейным пространством*** (или *действительным векторным пространством*). Элементы действительного линейного пространства называют ***векторами***.

Обращаем внимание читателя, что внутренняя операция «сложения» на самом деле может и не быть сложением в обычном понимании, а может быть, например, вычитанием, умножением, логарифмированием по определенному основанию и т.д. В точности также дело обстоит и с внешней операцией – «умножением». В дальнейшем, помня это, кавычки для удобства записи будем

опускать, однако обязательно будем оговаривать в каждом отдельном случае, что означает в этом конкретном примере операция сложения и что означает операция умножения.

Итак, дано определение действительного линейного пространства. Если бы мы предположили, что в множестве V определено умножение не только на действительные, но и на любые комплексные числа, то, сохраняя те же аксиомы I – VIII, получили бы определение ***комплексного линейного пространства***. Для определенности ниже рассматриваются действительные линейные пространства, однако все, что будет сказано в настоящей главе, переносится дословно на случай комплексных линейных пространств.

Для линейного пространства справедливы следующие теоремы:

Теорема 1 *В линейном пространстве имеется единственный нулевой элемент.*

Доказательство. Предположим, что в линейном пространстве V имеются два нулевых элемента θ_1 и θ_2, тогда $\theta_1 + \theta_2 = \theta_1$ и $\theta_1 + \theta_2 = \theta_2$, поэтому $\theta_1 = \theta_2$.

Теорема 2 *Для любого элемента x линейного пространства существует единственный противоположный элемент $-x$.*

Доказательство. Предположим, что для элемента x существует два противоположных элемента x_1 и x_2, т.е. $x + x_1 = \theta$ и $x + x_2 = \theta$, тогда $x_1 = (x_2 + x) + x_1 = x_2 + (x + x_1) = x_2$, следовательно, $x_1 = x_2$.

Теорема 3 *Для элемента $-x$ противоположным будет элемент x.*

Доказательство. Поскольку $-x + x = x + (-x)$ (по аксиоме I) и $x + (-x) = \theta$ (по аксиоме III), то $-x + x = \theta$, а это означает, что x - элемент, противоположный элементу $-x$.

Теорема 4 *Для любого элемента x произведение $0x = \theta$, где 0 – число нуль, θ – нулевой элемент.*

Доказательство. Так как $0x = 0x + (x + (-x)) = (0x + x) + (-x) = = x(0+1) + (-x) = x + (-x) = \theta$. Итак, получим $0x = \theta$.

Теорема .5 *Для любого элемента x произведение $-1 \cdot x = -x$, где $(-x)$ - элемент, противоположный элементу x.*

Доказательство. Поскольку $-1 \cdot x + x = (-1+1)x = 0x = \theta$, или $-1 \cdot x + x = \theta$, то $-1 \cdot x$ - элемент, противоположный элементу x, т.е. $(-1)x = -x$.

Теорема 6 *Для любого числа α произведение $\alpha\theta = \theta$, где θ – нулевой элемент.*

Доказательство. $\alpha\theta = \alpha(x + (-x)) = \alpha(x + (-1)x) = \alpha x + \alpha(-1)x = \alpha x + + (-\alpha x) = \theta$, $\alpha\theta = \theta$.

Теорема 9.7 *Если* $\alpha x = 0$ *и* $\alpha \neq 0$, *то* $x = \theta$.

Доказательство. Пусть $\alpha x = 0$ и $\alpha \neq 0$, тогда $\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha x = 0$, или $x = \theta$.

Теорема 9.8 *Если* $\alpha x = 0$ *и* $x \neq \theta$, *то* $\alpha = 0$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. $\alpha \neq 0$, получим $\frac{1}{\alpha} \cdot (\alpha x) = \frac{1}{\alpha} \cdot 0 = 0$, или $\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha x = x = 0$, то, что противоречит условию.

Следствие. Равенство $\alpha x = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$ или $x = \theta$.

Следствие непосредственно вытекает из 4, 6 – 8.

<u>Примеры линейных пространств</u>:

1) Множество всех свободных векторов $a(a_1, a_2, a_3)$, где a_1, a_2, a_3 могут принимать любые действительные значения, для которых определены сложение и умножение вектора на число является линейным пространством. Обозначим это линейное пространство символом V_3. Отметим, что роль нулевого элемента здесь играет нуль-вектор; для любого вектора a противоположным является $-a$.

2) Множество всех матриц размеров $m \times n$, для которых определены сложение матриц и умножение матрицы на число обычным образом, является линейным пространством. Роль нулевого элемента здесь играет нулевая матрица; для матрицы $(a_{ik})_{mn}$ противоположной будет матрица $(-a_{ik})_{mn}$.

3) Множество $\{P_n(x)\}$ всех алгебраических многочленов степени, не превышающей натурального числа n, для которых операции сложения многочленов и умножения многочлена на действительное число определены обычными правилами, является линейным пространством. Роль нулевого элемента играет многочлен, все коэффициенты которого равны нулю; для многочлена

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n .$$

противоположным будет

$$-P_n(x) = -a_0 x^n - a_1 x^{n-1} - \ldots - a_{n-1} x - a_n .$$

4) Множество A_n, элементами которого являются упорядоченные совокупности n действительных чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$; линейные операции над элементами A_n определяются формулами

$$x + y = ((x_1 + y_1), (x_2 + y_2), \ldots, (x_n + y_n)),$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n);$$

элемент $\theta = (0, 0, \ldots, 0)$ является нулевым, элемент $-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ - противоположным элементу $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, является линейным пространством.

Свойства линейного пространства

Непосредственно из аксиом линейного пространства можно вывести ряд его простейших свойств.

1°. Нулевой элемент θ определен однозначно.

◀ Пусть θ_1 и θ_2 — нулевые элементы пространства V. Рассмотрим сумму $\theta_1+\theta_2$. Вследствие того что θ_2 — нулевой элемент, из аксиомы 3 линейного пространства получаем, что $\theta_1+\theta_2=\theta_1$, а поскольку элемент θ_1 также нулевой, то $\theta_1+\theta_2=$ $=\theta_2+\theta_1=\theta_2$, т. е. $\theta_1=\theta_2$. ▶

2°. Для любого элемента x противоположный ему элемент $(-x)$ определен однозначно.

◀ Пусть для некоторого x существуют два противоположных элемента x' и x''. Покажем, что они равны.

Рассмотрим сумму $x''+x+x'$. Пользуясь аксиомами 1–3 линейного пространства и тем, что элемент x' противоположен элементу x, получаем

$$x''+x+x'=x''+(x+x')=x''+\theta=x''.$$

Аналогично убеждаемся в том, что

$$x''+x+x'=(x''+x)+x'=\theta+x'=x'. \ ▶$$

3°. В произвольном линейном пространстве нулевой (нейтральный) элемент θ равен произведению произвольного элемента x и числа 0; для каждого элемента x противоположный ему элемент равен произведению x и действительного числа (-1).

◄ Пусть x — произвольный элемент линейного пространства, x' — противоположный ему элемент. Применяя аксиомы линейного пространства, получаем

$$0x = 0x + \theta = 0x + (x + x') = 0x + 1x + x' =$$
$$= (0+1)x + x' = 1x + x' = x + x' = \theta \Rightarrow 0x = \theta.$$

Пусть x — произвольный элемент, $y = (-1)x$. Используя аксиомы линейного пространства и доказанное свойство $0x = \theta$, получаем

$$x + y = x + (-1)x = 1x + (-1)x = [1 + (-1)]x = 0x = \theta. ►$$

4°. Для любого вещественного числа α и θ выполняется равенство $\alpha\theta = \theta$.

◄ Действительно, $\alpha\theta = \alpha(\theta + \theta) = \alpha\theta + \alpha\theta$. Прибавляя к левой и правой частям равенства $-\alpha\theta$, получаем $\theta = \alpha\theta$. ►

5°. Из равенства $\alpha x = \theta$ следует, что либо $\alpha = 0$, либо $x = \theta$.

◄ В самом деле, пусть $\alpha \neq 0$, тогда

$$x = 1 \cdot x = \left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right)x = \frac{1}{\alpha}(\alpha x) = \frac{1}{\alpha}\theta = \theta. ►$$

Определение 1.3. ***Разностью*** $x - y$ ***элементов*** x и y называют такой элемент z, что $x = y + z$.

Легко заметить, что $x - y = x + (-y)$.

МИРЭА Российский технологический университет

Примеры решения задач

Задача 1.1. Показать, что множество $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right\}$ *квадратных матриц второго порядка, элементами которых являются действительные числа*, образует линейное пространство, если за операции взять сложение матриц и умножение матрицы на число.

◄ Пусть $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ — элементы множества M. Убедимся в том, что M — линейное пространство. Действительно, сумма матриц $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ и матрица $\alpha\mathbf{A}$ также представляют собой квадратные матрицы второго порядка, аксиомы 1 и 2 линейного пространства выполняются в силу переместительного и сочетательного свойств операции сложения матриц. Справедлива аксиома 3 линейного пространства — роль нулевого элемента играет нулевая матрица $\Theta=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Противоположным элементом может служить матрица $-\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix}$, поэтому аксиома 4 также справедлива. Остальные аксиомы линейного пространства выполняются в силу соответствующих операций над матрицами. Следовательно, множество M — линейное пространство.

Примечание. Аналогично можно доказать, что *все квадратные матрицы порядка n с вещественными элементами* образуют линейное (векторное) пространство над полем вещественных чисел, если за операции взять сложение матриц и умножение матрицы на число. ►

Задача 1.2. Проверить, образует ли линейное пространство *множество многочленов степени n от одного неизвестного с действительными коэффициентами*, если за операции взять обычные сложение многочленов и умножение многочлена на число.

◄ Такое множество не является линейным пространством, так как сумма двух многочленов степени n может оказаться многочленом степени меньше n.

Например, если $n=5$, то

$$(x^5+2x^4-3x+1)+(-x^5+5x^2-10)=2x^4+5x^2-3x-9,$$

т. е. операция сложения выводит элемент за множество многочленов степени 5. ►

Задача 1.3. Показать, что множество всевозможных упорядоченных пар действительных чисел с элементами $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, в котором операция сложения элементов определена по правилу

$$\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix},$$

а операция умножения элемента из R^2 на любое число $\lambda \in \mathrm{R}$ — по правилу

$$\lambda \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

не образует линейного пространства.

◄ Действительно, например, аксиома 7 линейного пространства не выполняется, поскольку:

$(\lambda + \mu)\mathbf{X} = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu)x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ — левая часть равенства аксиомы 7;

$\lambda \mathbf{X} + \mu \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu)x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$ — правая часть равенства аксиомы 7;

$$(\lambda + \mu)\mathbf{X} \neq \lambda \mathbf{X} + \mu \mathbf{X}. \ ►$$

Линейная зависимость векторов

Вектор y называют *пропорциональным* вектору x, если $y = kx$ для некоторого числа k. В аналитической геометрии такие векторы называются ***коллинеарными***. Вектор y называют ***линейной комбинацией*** (конечной) ***системы векторов*** $x_1, x_2, ..., x_s$, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$, что

$$y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_s x_s. \qquad (\ .1)$$

При этом говорят также, что вектор y линейно выражается через векторы $x_1, x_2, ..., x_s$.

Если вектор b линейно выражается через систему вектора $x_1, x_2, ..., x_s$, то он будет линейно выражаться и через любую конечную систему векторов, включающую в себя систему $x_1, x_2, ..., x_s$.

Действительно, если выполняется равенство

$$y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_s x_s + 0 \cdot x_{s+1} + ... + 0 \cdot x_r.$$

Это равенство означает, что вектор b линейно выражается через систему векторов $x_1, x_2, ..., x_r$.

Конечная система векторов $x_1, x_2, ..., x_r$ называется ***линейно зависимой***, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$, не все равные нулю, что

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_r x_r = 0. \qquad (\ .2)$$

В противном случае система векторов $x_1, x_2, ..., x_r$ ***линейно независима***.

Система векторов $x_1, x_2, \ldots, x_s$ *линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из ее векторов линейно выражается через остальные векторы.*

Действительно, если система векторов $x_1, x_2, \ldots, x_s$ линейно зависима, то выполняется равенство

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_s x_s = 0, \qquad (9.3)$$

в котором, например $\alpha_s \neq 0$. Тогда из этого равенства получаем:

$$x_s = -\frac{\alpha_1}{\alpha_s} x_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_s} a_2 - \ldots - \frac{\alpha_{s-1}}{\alpha_s} x_{s-1}.$$

Это означает, что вектор x_s линейно выражается через систему векторов $x_1, x_2, \ldots, x_{s-1}$.

Наоборот, пусть вектор x_s линейно выражается через систему векторов $x_1, x_2, \ldots, x_{s-1}$, т.е.

$$x_s = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_{s-1} x_{s-1}.$$

Тогда верно и равенство (9.3), в котором $\alpha_s = -1 \neq 0$. Значит, система векторов $x_1, x_2, \ldots, x_s$ линейно зависима.

Например, рассмотрим линейное пространство многочленов не выше второй степени. Докажем, что векторы $p_1 = 1 + 2t + 3t^2$, $p_2 = 2 + 3t + 4t^2$ и $p_3 = 3 + 5t + 7t^2$ линейно зависимы.

Действительно, эти вектора линейно зависимы, так как $p_3 = 1 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2$.

Совокупность элементов, каждый их которых есть элемент системы $x_1, x_2, \ldots, x_n$, называется ***подсистемой*** этой системы.

Две конечные системы векторов называют ***эквивалентными***, если они линейно выражаются одна через другую.

Непосредственно легко проверить, что

1) эквивалентность систем векторов обладает свойством транзитивности, т.е. если первая система векторов эквивалентна второй, а вторая – третьей, то первая система векторов эквивалентна третьей;

2) если вектор линейно выражается через данную систему векторов, то он линейно выражается через любую другую систему векторов, эквивалентную данной.

Теорема (*основная теорема о линейной зависимости векторов*) *Пусть даны две системы векторов* $x_1, x_2, ..., x_r$ *и* $y_1, y_2, ..., y_s$, *причем первая линейно независима и линейно выражается через вторую. Тогда число векторов в первой системе не превышает числа векторов во второй, т.е.* $r \le s$.

Доказательство. Утверждение теоремы, по существу, означает, что из s векторов нельзя создать систему линейных комбинаций этих векторов, которая, с одной стороны, линейно независима, а с другой – содержит более s векторов.

По условию теоремы система векторов $x_1, x_2, ..., x_r$ линейно независима и линейно выражается через векторы системы $y_1, y_2, ..., y_s$. Следовательно, существуют такие числа α_{ij}, что выполняются неравенства

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + ... + \alpha_{1s} y_s, \\ x_2 = \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 + ... + \alpha_{2s} y_s, \\ .... \\ x_r = \alpha_{r1} y_1 + \alpha_{r2} y_2 + ... + \alpha_{rs} y_s. \end{cases} \qquad (9.4)$$

Допустим, что $r > s$, и рассмотрим линейную комбинацию векторов

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_r x_r$.

В силу равенств (9.4) эту линейную комбинацию можно представить следующим образом:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_r x_r = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{s} x_i y_j \right) = \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{r} x_{ij} \lambda_i \right) y_j .$$

В рассматриваемой линейной комбинации векторов попытаемся подобрать числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ так, что они одновременно не равны нулю, но при этом все коэффициенты при векторах $y_1, y_2, ..., y_s$ обнуляются. Это означает, что набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ является решением системы линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} \alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{12}\lambda_2 + \ldots + \alpha_{1r}\lambda_r = 0, \\ \alpha_{21}\lambda_1 + \alpha_{22}\lambda_2 + \ldots + \alpha_{2r}\lambda_r = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{r1}\lambda_1 + \alpha_{r2}\lambda_2 + \ldots + \alpha_{rs}\lambda_r = 0. \end{cases}$$

При $r > s$ число неизвестных в системе превышает число уравнений, поэтому она имеет ненулевое решение. Любое ненулевое решение системы дает такой набор коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, одновременно не обращающихся в нуль, для которых

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_r x_r = 0.$$

Существование таких коэффициентов равносильно линейной зависимости векторов $x_1, x_2, \ldots, x_r$, что противоречит условию теоремы. Значит, предположение $r > s$ неверно и на самом деле $r \le s$. Что и требовалось доказать.

Следствие. *Любые две эквивалентные линейно независимые системы векторов имеют одинаковое число векторов.*

Действительно, по доказанной теореме для двух линейно независимых эквивалентных систем векторов количество векторов в первой системе не превышает количества векторов во второй. Но системы в этом утверждении можно поменять местами, поэтому в первой системе не меньше векторов, чем во второй.

Заметим, что любые две максимальные линейно независимые подсистемы данной системы векторов эквивалентны. Значит, согласно доказанному следствию они имеют одно и то же число векторов.

Свойства линейной зависимости и независимости.

1. Если к линейно зависимой системе векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$ добавить несколько векторов, то полученная система будет линейно зависимой.

   Доказательство.

   Так как система векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$ линейно зависима, то равенство $\lambda_1 \cdot a^{(1)} + \lambda_2 \cdot a^{(2)} + \ldots + \lambda_k \cdot a^{(k)} + \ldots + \lambda_p \cdot a^{(p)} = 0$ возможно при наличии хотя бы одного ненулевого числа из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$. Пусть $\lambda_k \neq 0$.

   Добавим к исходной системе векторов еще s векторов $c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots, c^{(s)}$, при этом получим систему $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}, c^{(1)}, c^{(2)}, \ldots, c^{(s)}$. Так как $\lambda_1 \cdot a^{(1)} + \lambda_2 \cdot a^{(2)} + \ldots + \lambda_k \cdot a^{(k)} + \ldots + \lambda_p \cdot a^{(p)} = 0$ и $0 \cdot c^{(1)} + 0 \cdot c^{(2)} + \ldots + 0 \cdot c^{(s)} = 0$, то линейная комбинация векторов этой системы вида
   $$\lambda_1 \cdot a^{(1)} + \lambda_2 \cdot a^{(2)} + \ldots + \lambda_k \cdot a^{(k)} + \ldots + \lambda_p \cdot a^{(p)} +$$
   $$+ 0 \cdot c^{(1)} + 0 \cdot c^{(2)} + \ldots + 0 \cdot c^{(s)}$$
   представляет собой нулевой вектор, а $\lambda_k \neq 0$. Следовательно, полученная система векторов является линейно зависимой.

2. Если из линейно независимой системы векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$ исключить несколько векторов, то полученная система будет линейно независимой.

   Доказательство.

   Предположим, что полученная система линейно зависима. Добавив к этой системе векторов все отброшенные векторы, мы получим исходную систему векторов. По условию – она линейно независима, а в силу предыдущего свойства линейной зависимости она должна быть линейно зависимой. Мы пришли к противоречию, следовательно, наше предположение неверно.

3. Если в системе векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$ есть хотя бы один нулевой вектор, то такая система линейно зависимая.

Доказательство.

Пусть вектор $a^{(k)}$ в этой системе векторов является нулевым. Предположим, что исходная система векторов линейно независима. Тогда векторное равенство $\lambda_1 \cdot a^{(1)} + \lambda_2 \cdot a^{(2)} + \ldots + \lambda_k \cdot a^{(k)} + \ldots + \lambda_p \cdot a^{(p)} = 0$ возможно только тогда, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = \ldots = \lambda_p = 0$. Однако, если взять любое λ_k, отличное от нуля, то равенство $\lambda_1 \cdot a^{(1)} + \lambda_2 \cdot a^{(2)} + \ldots + \lambda_k \cdot a^{(k)} + \ldots + \lambda_p \cdot a^{(p)} = 0$ все равно будет справедливо, так как $a^{(k)} = 0$. Следовательно, наше предположение неверно, и исходная система векторов линейно зависима.

4. Если система векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$ линейно зависима, то хотя бы один из ее векторов линейно выражается через остальные. Если система векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$ линейно независима, то ни один из векторов не выражается через остальные.

Исследование системы векторов на линейную зависимость.

Поставим задачу: нам требуется установить линейную зависимость или линейную независимость системы векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$.

Логичный вопрос: «как ее решать?»

Кое-что полезное с практической точки зрения можно вынести из рассмотренных выше определений и свойств линейной зависимости и независимости системы векторов. Эти определения и свойства позволяют нам установить линейную зависимость системы векторов в следующих случаях:

1. когда хотя бы один из векторов системы является нулевым;
2. когда система векторов содержит два или более равных вектора;
3. когда система векторов содержит пропорциональные векторы (a и $\gamma \cdot a$);
4. когда достаточно очевидно, что один из векторов системы линейно выражается через несколько других.

Как же быть в остальных случаях, которых большинство?

Теорема.

Пусть r – ранг матрицы A порядка p на n, $r \le \min(p, n)$. Пусть M – базисный минор матрицы A. Все строки (все столбцы) матрицы A, которые не участвуют в образовании базисного минора M, линейно выражаются через строки (столбцы) матрицы, порождающие базисный минор M.

А теперь поясним связь теоремы о ранге матрицы с исследованием системы векторов на линейную зависимость.

Составим матрицу A, строками которой будут векторы исследуемой системы $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(p)}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & \cdots & a_n^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & \cdots & a_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{(p)} & a_2^{(p)} & \cdots & a_n^{(p)} \end{pmatrix}$$

Что будет означать линейная независимость системы векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(p)}$?

Из четвертого свойства линейной независимости системы векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(p)}$ мы знаем, что ни один из векторов системы не выражается через остальные. Иными словами, ни одна строка матрицы A не будет линейно выражаться через другие строки, следовательно, **линейная независимость системы векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(p)}$ будет равносильна условию *Rank(A)=p*.**

Что же будет означать линейная зависимость системы векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(p)}$?

Все очень просто: хотя бы одна строка матрицы A будет линейно выражаться через остальные, следовательно, **линейная зависимость системы векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(p)}$ будет равносильна условию *Rank(A)<p*.**

Алгоритм исследования системы векторов на линейную зависимость.

1. Сначала следует убедиться, что число векторов исследуемой системы $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$ не превосходит числа координат векторов. Если же *p*>*n*, то можно делать вывод о линейной зависимости.
2. Проверяем, не содержит ли система векторов нулевого вектора, равных векторов, пропорциональных векторов (a и $\gamma \cdot a$). Если такие имеются, то также делается вывод о линейной зависимости системы.
3. Если два предыдущих пункта алгоритма не привели к результату, то составляем матрицу *A*, строками которой являются векторы исследуемой системы векторов и находим ее ранг. Если $Rank(A)<p$, то система векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$ линейно зависима. Если $Rank(A)=p$, то система векторов $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$ линейно независима.

Пример.

Дана система векторов $a = (1, 2, 5)$, $b = (4, 0, -1)$, $c = (0, 0, 0)$. Исследуйте ее на линейную зависимость.

Решение.

Так как вектор *c* нулевой, то исходная система векторов линейно зависима в силу третьего свойства.

Ответ:

система векторов линейно зависима.

Пример.

Исследуйте систему векторов $a = (1, -1, 2, 0)$, $b = (1, 5, -2, \sqrt{2})$, $c = (3, -3, 6, 0)$ на линейную зависимость.

Решение.

Не сложно заметить, что координаты вектора *c* равны соответствующим координатам вектора a, умноженным на *3*, то есть, $a = 3 \cdot c$. Поэтому, исходная система векторов линейно зависима.

Ответ:

система векторов линейно зависима.

Пример.

Является ли система векторов $a=(1,2)$, $b=\left(7,\frac{1}{3}\right)$, $c=\left(0,e^2\right)$, $d=\left(\sqrt{\pi},1\right)$ линейно зависимой?

Решение.

Эта система векторов является линейно зависимой, так как количество векторов в системе равно *4*, а сами векторы двумерные.

Ответ:

да, является.

Пример.

Является ли система векторов $\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$ линейно независимой?

Решение.

Примем эти векторы столбцами матрицы *A* и найдем ранг полученной матрицы методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix}1&2&2\\-1&-1&0\\3&4&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&2\\-1+1\cdot1&-1+1\cdot2&0+1\cdot2\\3+(-3)\cdot1&4+(-3)\cdot2&2+(-3)\cdot2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&2\\0&-2&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&2\\0&-2+2\cdot1&-4+2\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Следовательно, *Rank(A)=2<3*, поэтому, исходная система векторов линейно зависима.

Ответ:

Спасибо за внимание!